

CORRIGÉ

Agrégation interne · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°01 — Théorème de Cayley-Hamilton, puissances de matrices et suites récurrentes

Suites récurrentes linéaires ·
Matrices et endomorphismes ·
Polynômes d'endomorphismes ·
Théorème de Cayley-Hamilton ·
Polynôme minimal

I D'un système de suites à une relation entre matrices

1

Deux suites, une même récurrence

Les premiers couples sont

$$(x_0, y_0) = (1, 0), \quad (x_1, y_1) = (2, 1), \quad (x_2, y_2) = (5, 3), \quad (x_3, y_3) = (13, 8).$$

Pour x_n , on a

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + y_{n+1}.$$

Or $y_{n+1} = x_n + y_n$ et $y_n = x_{n+1} - 2x_n$. Ainsi

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n + x_{n+1} - 2x_n = 3x_{n+1} - x_n.$$

De même,

$$y_{n+2} = x_{n+1} + y_{n+1}.$$

Comme $x_{n+1} = 2x_n + y_n$ et $x_n = y_{n+1} - y_n$, on obtient

$$y_{n+2} = 3x_n + 2y_n = 3y_{n+1} - y_n.$$

Les deux suites vérifient donc

$$z_{n+2} = 3z_{n+1} - z_n.$$

Une fois z_0 et z_1 connus, cette relation détermine successivement $z_2, z_3, \dots$; une récurrence immédiate donne l'unicité de la suite correspondante.

IDÉE Une récurrence linéaire d'ordre 2 possède une mémoire de dimension 2 : deux termes consécutifs suffisent à déterminer toute la suite.

2

Changer de langage

On a

$$AU_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_n + y_n \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

Ainsi $U_{n+1} = AU_n$. Par récurrence,

$$\boxed{U_n = A^n U_0.}$$

Le système de deux relations scalaires couplées devient une seule itération linéaire.

3 ————

Toutes les puissances sont-elles vraiment nouvelles ?

On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Or

$$3A - I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{A^2 = 3A - I_2.}$$

En multipliant par A^n ,

$$\boxed{A^{n+2} = 3A^{n+1} - A^n}$$

pour tout $n \geq 0$.

4 ————

Une compression explicite

On montre par récurrence que

$$A^n = p_n A - p_{n-1} I_2.$$

Pour $n = 1$, l'égalité est immédiate. Supposons-la vraie à l'indice n . Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= p_n A^2 - p_{n-1} A \\ &= p_n (3A - I_2) - p_{n-1} A \\ &= (3p_n - p_{n-1})A - p_n I_2 \\ &= p_{n+1} A - p_n I_2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{A^n = p_n A - p_{n-1} I_2.}$$

Comme $U_0 = (1, 0)^T$,

$$U_n = p_n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - p_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$y_n = p_n, \quad x_n = 2p_n - p_{n-1} = p_{n+1} - p_n.$$

Toutes les puissances de A appartiennent à l'espace vectoriel engendré par I_2 et A .

5

Le phénomène en dimension 2

Pour

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on a

$$B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $(a + d)B - (ad - bc)I_2$ possède exactement les mêmes coefficients. Donc

$$B^2 - \operatorname{tr}(B)B + \det(B)I_2 = 0.$$

En multipliant par B^n ,

$$B^{n+2} = \operatorname{tr}(B)B^{n+1} - \det(B)B^n.$$

Si $V_n = B^n V_0$, alors

$$V_{n+2} = \operatorname{tr}(B)V_{n+1} - \det(B)V_n.$$

L'égalité étant vectorielle, chacune des coordonnées vérifie

$$s_{n+2} = \operatorname{tr}(B)s_{n+1} - \det(B)s_n.$$

Cette relation peut avoir un ordre effectif inférieur à 2 dans des cas particuliers, par exemple lorsque B est une matrice scalaire.

II Polynômes d'un endomorphisme et relations d'annulation

6

Donner un sens à $P(u)$

Si

$$P(X) = \sum_i a_i X^i, \quad Q(X) = \sum_j b_j X^j,$$

alors l'additivité est immédiate. Pour le produit,

$$P(u) \circ Q(u) = \sum_{i,j} a_i b_j u^{i+j}.$$

Les coefficients devant u^k sont précisément ceux du produit PQ . Ainsi

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

Comme $PQ = QP$ dans $K[X]$,

$$P(u)Q(u) = Q(u)P(u).$$

IDÉE Une identité polynomiale peut être transportée vers un endomorphisme en remplaçant X par u ; les polynômes en un même endomorphisme commutent entre eux.

7

Pourquoi un polynôme annulateur existe-t-il toujours ?

La relation de la première partie s'écrit

$$A^2 - 3A + I_2 = 0,$$

c'est-à-dire $P(A) = 0$ pour

$$P(X) = X^2 - 3X + 1.$$

Si $P(u) = 0$ et $Q \in K[X]$, alors

$$(QP)(u) = Q(u)P(u) = 0.$$

Tout multiple d'un polynôme annulateur est donc encore annulateur.

Comme $\text{End}(E)$ est de dimension d^2 , la famille de $d^2 + 1$ endomorphismes

$$\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{d^2}$$

est liée. Il existe donc des scalaires $a_0, \dots, a_{d^2}$, non tous nuls, tels que

$$a_0 \text{Id}_E + a_1 u + \dots + a_{d^2} u^{d^2} = 0.$$

Le polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{d^2} X^{d^2}$$

est non nul et vérifie $P(u) = 0$.

Ainsi tout endomorphisme en dimension finie possède un polynôme annulateur. Cette preuve donne un annulateur de degré au plus d^2 , mais elle ne fournit ni un polynôme privilégié ni une relation de degré d .

8

Réduire toutes les puissances

La division euclidienne donne

$$Q = SP + R, \quad R = 0 \text{ ou } \deg R < r.$$

En évaluant en u ,

$$Q(u) = S(u)P(u) + R(u) = R(u),$$

car $P(u) = 0$.

Il faut distinguer deux unicités : le reste R est l'unique reste de la division euclidienne de Q par le polynôme P fixé ; si P n'est pas minimal, il peut en revanche exister un autre polynôme de degré $< r$ qui prenne la même valeur en u .

En particulier, pour $Q = X^n$,

$$u^n \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{r-1}).$$

De plus,

$$P(u) = u^r + a_{r-1}u^{r-1} + \dots + a_0 \text{Id}_E = 0.$$

En multipliant par u^n ,

$$u^{n+r} + a_{r-1}u^{n+r-1} + \dots + a_0u^n = 0.$$

Si $s_n = \ell(u^n(v))$, on applique cette égalité à v , puis la forme linéaire ℓ . On obtient

$$s_{n+r} + a_{r-1}s_{n+r-1} + \dots + a_0s_n = 0.$$

IDÉE Toute relation polynomiale satisfaite par un endomorphisme produit automatiquement des récurrences pour ses observations linéaires.

III Le théorème de Cayley-Hamilton

9

Le polynôme caractéristique

Si $A' = S^{-1}AS$, alors

$$XI_d - A' = S^{-1}(XI_d - A)S.$$

Par multiplicativité du déterminant,

$$\det(XI_d - A') = \det(S^{-1}) \det(XI_d - A) \det(S) = \det(XI_d - A).$$

Le polynôme caractéristique ne dépend donc pas de la base choisie.

Dans le développement de $\det(XI_d - A)$, le terme de plus haut degré provient du produit des d termes X de la diagonale ; son coefficient vaut 1. Ainsi

$$\chi_u \text{ est unitaire de degré } d.$$

10

Retrouver la dimension 2

Pour

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned}\chi_B(X) &= (X - a)(X - d) - bc \\ &= X^2 - (a + d)X + ad - bc.\end{aligned}$$

Donc

$$\chi_B(X) = X^2 - \operatorname{tr}(B)X + \det(B).$$

La relation de la question 5 est exactement $\chi_B(B) = 0$: le calcul direct en dimension 2 est un cas particulier du théorème général.

11

Ce que Cayley-Hamilton apporte

La division euclidienne donne

$$X^n = Q_n \chi_u + R_n, \quad \deg R_n < d.$$

Comme $\chi_u(u) = 0$,

$$u^n = R_n(u).$$

Ainsi

$$u^n \in \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}_E, u, \dots, u^{d-1}).$$

Si

$$\chi_u(X) = X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \dots + c_0,$$

Cayley-Hamilton donne

$$u^d + c_{d-1}u^{d-1} + \dots + c_0 \operatorname{Id}_E = 0.$$

En multipliant par u^n ,

$$u^{n+d} + c_{d-1}u^{n+d-1} + \dots + c_0 u^n = 0.$$

La question 7 assurait seulement l'existence d'un annulateur de degré au plus d^2 . Cayley-Hamilton fournit un annulateur canonique, construit à partir de u , unitaire et de degré exactement d .

12

Une puissance élevée sans diagonalisation

On calcule

$$XI_3 - M = \begin{pmatrix} X & 0 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{pmatrix},$$

puis

$$\chi_M(X) = X^3 - X - 1.$$

Cayley-Hamilton donne

$$M^3 = M + I_3.$$

Modulo $X^3 - X - 1$, on a $X^3 \equiv X + 1$, puis

$$X^5 \equiv X^2 + X + 1.$$

Par exponentiation rapide,

$$X^{10} \equiv (X^2 + X + 1)^2 \equiv 4X^2 + 5X + 3,$$

puis

$$X^{20} \equiv (4X^2 + 5X + 3)^2.$$

En réduisant à nouveau avec $X^3 \equiv X + 1$ et $X^4 \equiv X^2 + X$,

$$X^{20} \equiv 65X^2 + 86X + 49 \pmod{X^3 - X - 1}.$$

Donc

$$M^{20} = 65M^2 + 86M + 49I_3.$$

Or

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$M^{20} = \begin{pmatrix} 49 & 65 & 86 \\ 86 & 114 & 151 \\ 65 & 86 & 114 \end{pmatrix}.$$

IDÉE Pour calculer une grande puissance A^n , on peut calculer le reste de X^n modulo un polynôme annulateur de A , puis remplacer X par A .

IV Suites récurrentes et systèmes linéaires : deux langages

13

Transformer une récurrence en dynamique matricielle

Pour $r = 1$, la matrice compagnon se réduit à $C = (-a_0)$ et la vérification ci-dessous reste valable.

Par définition,

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} s_{n+1} \\ s_{n+2} \\ \vdots \\ s_{n+r} \end{pmatrix}.$$

Les $r - 1$ premières lignes de CV_n décalent les coordonnées. La dernière vaut

$$-a_0 s_n - a_1 s_{n+1} - \cdots - a_{r-1} s_{n+r-1} = s_{n+r}$$

par la relation de récurrence. Ainsi

$$V_{n+1} = CV_n.$$

Par récurrence,

$$V_n = C^n V_0.$$

La première coordonnée de V_n vaut s_n , donc

$$s_n = \pi_1(C^n V_0).$$

La question 8 montre qu'une identité polynomiale satisfaite par une dynamique linéaire produit des suites récurrentes ; ici, réciproquement, toute suite satisfaisant une récurrence linéaire à coefficients constants devient l'observation d'une dynamique linéaire en dimension finie.

14

Toute dynamique linéaire finie produit des récurrences

Avec $V_0 \in K^d$, on a $V_n = A^n V_0$. Cayley-Hamilton donne

$$A^{n+d} + c_{d-1} A^{n+d-1} + \cdots + c_0 A^n = 0.$$

En appliquant cette égalité à V_0 ,

$$V_{n+d} + c_{d-1} V_{n+d-1} + \cdots + c_0 V_n = 0.$$

Chaque coordonnée, et plus généralement toute forme linéaire appliquée à cette relation, vérifie donc

$$s_{n+d} + c_{d-1} s_{n+d-1} + \cdots + c_0 s_n = 0.$$

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$\chi_A(X) = X^2 - 3X + 1.$$

On retrouve donc

$$s_{n+2} = 3s_{n+1} - s_n,$$

ce qui redonne simultanément les récurrences de x_n et de y_n .

15

Un autre observateur : la trace des puissances

En prenant la trace dans

$$A^{n+d} + c_{d-1} A^{n+d-1} + \cdots + c_0 A^n = 0,$$

et en utilisant la linéarité de la trace, on obtient

$$t_{n+d} + c_{d-1}t_{n+d-1} + \cdots + c_0t_n = 0.$$

On peut lire ce résultat dans l'espace vectoriel $M_d(K)$: l'application $B \mapsto \text{tr}(B)$ est une forme linéaire. De la même manière, chaque coefficient $(A^n)_{ij}$ satisfait une récurrence issue de χ_A .

IDÉE Suites récurrentes linéaires et itérations linéaires en dimension finie sont deux façons de décrire le même mécanisme : un état de dimension finie évolue linéairement, et toute observation linéaire de cet état satisfait une récurrence.

V Jusqu'où peut-on comprimer ?

16

La dimension réellement nécessaire

Soit μ_u un polynôme annulateur unitaire de degré minimal. Si P est un autre polynôme annulateur, effectuons la division euclidienne

$$P = Q\mu_u + R, \quad \deg R < \deg \mu_u.$$

En évaluant en u ,

$$0 = P(u) = Q(u)\mu_u(u) + R(u) = R(u).$$

Si $R \neq 0$, il serait un annulateur de degré strictement inférieur à celui de μ_u , contradiction. Ainsi $R = 0$, donc

$$\mu_u \mid P.$$

Si deux polynômes unitaires de degré minimal existaient, chacun diviserait l'autre ; ils seraient donc égaux. Le polynôme minimal est unique.

Comme χ_u est annulateur par Cayley-Hamilton,

$$\mu_u \mid \chi_u.$$

Posons $m = \deg \mu_u$. Supposons qu'il existe une relation

$$a_0I + a_1u + \cdots + a_{m-1}u^{m-1} = 0$$

avec des coefficients non tous nuls. Le polynôme correspondant serait un annulateur non nul de degré strictement inférieur à m , contradiction. La famille

$$(\text{Id}_E, u, \dots, u^{m-1})$$

est donc libre.

Par ailleurs, la division de tout $P \in K[X]$ par μ_u donne un reste de degré $< m$, donc tout $P(u)$ appartient à l'espace engendré par cette famille. Ainsi

$$(\text{Id}_E, u, \dots, u^{m-1}) \text{ est une base de } K[u]$$

et

$$\dim K[u] = \deg \mu_u.$$

Pour $u = 2I_E$ sur $E = \mathbb{R}^2$,

$$\chi_u(X) = (X - 2)^2,$$

alors que

$$\mu_u(X) = X - 2.$$

Par exemple,

$$P(X) = (X - 2)(X + 1)$$

est également annulateur, puisqu'il est multiple de μ_u .

On distingue donc :

- **un polynôme annulateur** : tout polynôme non nul P tel que $P(u) = 0$.
- **le polynôme minimal** : l'unique annulateur unitaire de plus petit degré ; il divise tout polynôme annulateur.
- **le polynôme caractéristique** : $\det(XI - A)$, polynôme canonique unitaire de degré $\dim E$, qui annule u par Cayley-Hamilton.

Ils ne coïncident pas en général.

IDÉE L'espace $K[u]$ contient toutes les puissances de u et sa dimension est exactement $\deg \mu_u$. Cayley-Hamilton donne en particulier $\dim K[u] \leq \dim E$.

Pour approfondir

Agrégation interne de mathématiques 2025, première épreuve : exercice préliminaire 1, questions 1 à 4, puis partie III, questions 14 à 17 — prolongements des parties II, IV et V. [Sujet officiel](#)

Agrégation interne de mathématiques 2022, première épreuve : exercice préliminaire, questions 2 et 3 — matrice compagnon et démonstration de Cayley-Hamilton, en prolongement des parties III et IV. [Sujet officiel](#)