

CORRIGÉ

Agrégation interne · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°04 — Convergences simple et uniforme des suites de fonctions

Suites de fonctions · Convergence simple et uniforme · Convergence uniforme sur tout compact · Passage à la limite sous l'intégrale · Dérivation d'une limite · Critère de Cauchy uniforme

I Une bosse qui se resserre

1

(a) Sur $[0, 2]$,

$$\psi(t) = t(2-t)^2 = 4t - 4t^2 + t^3.$$

C'est une fonction polynomiale. En $t = 2$, cette expression vaut 0, comme la seconde branche de la définition ; ψ est donc continue sur $[0, +\infty[$.

Pour $0 < t < 2$,

$$\psi'(t) = 4 - 8t + 3t^2 = (t-2)(3t-2).$$

Ainsi $\psi' > 0$ sur $]0, 2/3[$ et $\psi' < 0$ sur $]2/3, 2[$. La fonction croît sur $[0, 2/3]$, décroît sur $[2/3, 2]$, puis reste nulle.

t	0	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$\psi'(t)$	+	0	-	0
$\psi(t)$	0	$\nearrow \frac{32}{27}$	$\searrow 0$	$\longrightarrow 0$

(b) Le maximum est atteint en $t = 2/3$ et vaut

$$\psi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}.$$

(c) Comme ψ est nulle sur $[2, +\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) dt = \int_0^2 (4t - 4t^2 + t^3) dt = 8 - \frac{32}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

2

(a) Puisque $p_n(x) = \psi(nx)$ et que $\psi(t) \neq 0$ exactement pour $0 < t < 2$,

$$p_n(x) \neq 0 \iff 0 < x < \frac{2}{n}.$$

La bosse se resserre donc vers 0. Le dessin suggère que sa hauteur reste fixe et que son sommet se rapproche de 0.

(b) Fixons $x \in [0, 1]$. Si $x = 0$, alors $p_n(0) = 0$ pour tout n . Si $x > 0$, choisissons $N > 2/x$. Pour tout $n \geq N$, on a $nx > 2$, donc $p_n(x) = 0$. Ainsi

$$p_n(x) \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

(c) La variable nx parcourt $[0, 2]$ sur la partie non nulle de p_n . Le maximum de p_n est donc celui de ψ :

$$\max_{[0,1]} p_n = \frac{32}{27}, \quad x_n = \frac{2}{3n}.$$

On a $x_n \rightarrow 0$ mais $p_n(x_n) = 32/27$ pour tout n . Chaque point fixé finit donc par ne plus voir la bosse, tandis que le point où l'erreur est maximale se déplace avec n .

3

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq r_n(x) = \frac{1}{n} p_n(x) \leq \frac{32}{27n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons N tel que $32/(27N) < \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$|r_n(x)| \leq \frac{32}{27n} \leq \frac{32}{27N} < \varepsilon.$$

Le même N convient donc à tous les points. À la question 2(b), au contraire, un choix naturel était $N > 2/x$: le rang dépendait de x .

4

(a) Si $x = 0$, $q_n(0) = 0$. Si $x > 0$, alors pour $n > 2/x$ on a $p_n(x) = 0$, donc $q_n(x) = np_n(x) = 0$. Par conséquent

$$q_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

(b) Par le changement de variable $u = nx$,

$$\int_0^1 q_n(x) dx = n \int_0^{2/n} \psi(nx) dx = \int_0^2 \psi(u) du = \frac{4}{3}.$$

(c) Pour chaque point fixé, $q_n(x)$ tend vers 0, mais l'aire reste exactement égale à $4/3$. La hauteur augmente pendant que la largeur diminue : la convergence point par point ne contrôle pas à elle seule l'aire totale.

5

(a) On a immédiatement $H_n(0) = 0$. Si $x \geq 2/n$, tout le support de q_n est contenu dans $[0, x]$, donc

$$H_n(x) = \frac{3}{4} \int_0^1 q_n(t) dt = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.$$

(b) Pour $x = 0$, $H_n(0) = 0$. Si $x > 0$, dès que $n > 2/x$, on a $x > 2/n$ et donc $H_n(x) = 1$. La limite simple est

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

(c) Chaque q_n est continue ; la fonction $x \mapsto \int_0^x q_n(t) dt$ est donc continue, et même dérivable. Chaque H_n est continue. En revanche

$$H(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1,$$

donc H est discontinue en 0.

II Un même rang pour tous les points ?

6

(a) La convergence simple s'écrit

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Le point x est fixé avant le choix de N ; ce rang peut donc dépendre de x .

La convergence uniforme s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ici N est choisi avant x : il doit convenir simultanément à tous les points.

(b) Si la convergence est uniforme, fixons $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Le rang fourni par l'uniformité vérifie l'inégalité pour tous les points de E , donc en particulier pour ce x . La convergence est simple.

(c) La négation exacte est

$$\boxed{\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n \geq N, \exists x \in E, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0.}$$

(d) Pour p_n , la limite simple est 0. Prenons $\varepsilon_0 = 1$. Pour tout N , choisissons $n \geq \max(N, 2)$ et

$$x_n = \frac{2}{3n}.$$

Alors

$$|p_n(x_n)| = \frac{32}{27} \geq 1.$$

La négation précédente est satisfaite : (p_n) ne converge pas uniformément vers 0.

Idée. Le point qui fait échouer l'uniformité est autorisé à dépendre de n . C'est exactement ce qui permet à une bosse de « fuir » vers le bord tout en restant haute.

7

(a) Supposons d'abord $\|f_n - f\|_{\infty, E} \rightarrow 0$. Alors, pour n assez grand,

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} < \varepsilon,$$

et donc, pour tout $x \in E$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty, E} < \varepsilon.$$

La convergence est uniforme.

Réciproquement, supposons la convergence uniforme. Pour $\varepsilon > 0$, appliquons la définition avec $\varepsilon/2$. Pour n assez grand et tout x ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En prenant le supremum,

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ainsi

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformément} \iff \|f_n - f\|_{\infty, E} \rightarrow 0.$$

Le passage par $\varepsilon/2$ évite de supposer que le supremum est atteint.

(b) D'après la question 2,

$$\|p_n\|_{\infty} = \frac{32}{27}.$$

Comme $r_n = p_n/n$,

$$\|r_n\|_{\infty} = \frac{32}{27n} \rightarrow 0.$$

Enfin $q_n = np_n$, donc

$$\|q_n\|_{\infty} = \frac{32n}{27}.$$

(c) Pour $x > 0$, $H(x) = 1$ et $0 \leq H_n(x) \leq 1$, donc $|H_n(x) - H(x)| \leq 1$. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, la continuité de H_n et $H_n(0) = 0$ donnent

$$|H_n(x) - H(x)| = 1 - H_n(x) \rightarrow 1.$$

Ainsi

$$\|H_n - H\|_{\infty, [0,1]} = 1.$$

Ce supremum n'est pas atteint : en 0 l'erreur vaut 0, et pour $x > 0$ elle est strictement inférieure à 1.

8

(a) Soit $a > 0$. Si $n > 2/a$, alors pour tout $x \in [a, 1]$, $nx > 2$. Donc

$$p_n = q_n = r_n = 0 \quad \text{sur } [a, 1].$$

De plus $x \geq a > 2/n$, donc $H_n(x) = 1 = H(x)$ sur $[a, 1]$.

(b) Soit K un compact non vide de $]0, 1]$. La fonction $x \mapsto x$ atteint sur K son minimum $a > 0$. Alors $K \subset [a, 1]$, et la question précédente montre que les fonctions coïncident même exactement avec leurs limites sur K à partir d'un certain rang.

Il n'y a pas contradiction avec l'échec sur $[0, 1]$: tous les défauts se concentrent près de 0, tandis qu'un compact de $]0, 1]$ reste à une distance strictement positive de ce point.

III Ce que permet la convergence uniforme

9

(a) Fixons $x_0 \in [a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe N tel que

$$\|f_N - f\|_{\infty, [a, b]} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

La fonction f_N est continue en x_0 . Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour un tel x ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi f est continue en x_0 , donc sur $[a, b]$.

(b) Les fonctions H_n sont continues et convergent simplement vers la fonction H discontinue en 0. La convergence simple ne préserve donc pas la continuité.

(c) Le même indice N doit contrôler $|f(x) - f_N(x)|$ pour tous les x proches de x_0 et aussi $|f(x_0) - f_N(x_0)|$. Sous convergence simple, le rang contrôlant le premier terme peut dépendre de x ; on ne dispose donc pas en général d'une fonction f_N unique valable sur tout le voisinage.

10

(a) Par linéarité et inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| &= \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n - f| \\ &\leq (b - a) \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]}. \end{aligned}$$

La norme de droite tend vers 0 ; donc

$$\boxed{\int_a^b f_n(x) dx \longrightarrow \int_a^b f(x) dx.}$$

(b) La suite (q_n) converge simplement vers 0, mais

$$\int_0^1 q_n(x) dx = \frac{4}{3}$$

pour tout n . Ainsi

$$\lim_n \int_0^1 q_n \neq \int_0^1 \lim_n q_n.$$

(c) La suite (p_n) n'est pas uniformément convergente puisque $\|p_n\|_{\infty} = 32/27$. Pourtant

$$\int_0^1 p_n(x) dx = \frac{1}{n} \int_0^2 \psi(u) du = \frac{4}{3n} \longrightarrow 0.$$

La convergence uniforme est donc une condition suffisante, mais non nécessaire, pour ce passage à la limite.

11

(a) Pour $x = 0$, $f_{n,\alpha}(0) = 0$. Si $x > 0$, dès que $n > 2/x$, $p_n(x) = 0$, donc $n^\alpha p_n(x) = 0$. Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_{n,\alpha}(x) \rightarrow 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, 1].$$

(b) Puisque $n^\alpha > 0$,

$$\|f_{n,\alpha}\|_\infty = \frac{32}{27} n^\alpha.$$

Cette quantité tend vers 0 si et seulement si $\alpha < 0$. Donc

$$f_{n,\alpha} \rightarrow 0 \text{ uniformément} \iff \alpha < 0.$$

(c) On obtient

$$\int_0^1 f_{n,\alpha}(x) dx = n^\alpha \frac{4}{3n} = \frac{4}{3} n^{\alpha-1}.$$

Par conséquent,

$$\alpha < 1 : \int_0^1 f_{n,\alpha} \rightarrow 0, \quad \alpha = 1 : \int_0^1 f_{n,\alpha} = \frac{4}{3},$$

et, si $\alpha > 1$, l'intégrale tend vers $+\infty$.

(d) Pour $0 \leq \alpha < 1$, la convergence n'est pas uniforme mais le passage à la limite sous l'intégrale reste valable. Pour $\alpha \geq 1$, la convergence simple vers 0 subsiste alors que les intégrales ne tendent pas vers 0.

Les deux seuils sont donc distincts :

$$\alpha = 0 \text{ pour l'uniformité,} \quad \alpha = 1 \text{ pour les intégrales.}$$

IV Peut-on dériver une limite ?

12

(a) Pour $0 < t < 2$,

$$\psi'(t) = (t-2)(3t-2),$$

donc $\psi'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 2^-$. À droite de 2, ψ est constante égale à 0, donc la dérivée vaut aussi 0. Ainsi $\psi'(2) = 0$ et ψ est de classe $\mathcal{C}^1$. Par composition et multiplication scalaire, chaque r_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

(b) Par dérivation,

$$r'_n(x) = \psi'(nx),$$

donc

$$r'_n(0) = \psi'(0) = 4$$

pour tout n .

(c) Pourtant $r_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[0, 1]$, et la dérivée de la fonction limite est nulle. On n'a donc pas

$$r'_n(0) \rightarrow 0.$$

La convergence uniforme des fonctions ne suffit pas pour dériver la limite ni pour assurer la convergence des dérivées vers la dérivée de la limite.

13

(a) Chaque g'_n est continue et (g'_n) converge uniformément vers h . D'après la question 9,

$$h \text{ est continue sur } [a, b].$$

(b) Par le théorème fondamental du calcul intégral,

$$g_n(x) = g_n(x_0) + \int_{x_0}^x g'_n(t) dt.$$

Donc

$$g_n(x) - G(x) = g_n(x_0) - \ell + \int_{x_0}^x (g'_n(t) - h(t)) dt.$$

D'où

$$|g_n(x) - G(x)| \leq |g_n(x_0) - \ell| + |x - x_0| \|g'_n - h\|_\infty.$$

Comme $|x - x_0| \leq b - a$,

$$|g_n(x) - G(x)| \leq |g_n(x_0) - \ell| + (b - a) \|g'_n - h\|_\infty.$$

Le membre de droite ne dépend pas de x et tend vers 0. Ainsi

$$g_n \rightarrow G \text{ uniformément sur } [a, b].$$

(c) Puisque h est continue,

$$G(x) = \ell + \int_{x_0}^x h(t) dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$G' = h.$$

14

Fixons $x_0 \in [a, b]$. La convergence simple donne

$$g_n(x_0) \rightarrow g(x_0).$$

La question 13 s'applique donc avec $\ell = g(x_0)$ et fournit

$$G(x) = g(x_0) + \int_{x_0}^x h(t) dt$$

tel que $g_n \rightarrow G$ uniformément, donc simplement.

Mais $g_n \rightarrow g$ simplement aussi. Par unicité de la limite réelle à chaque point,

$$g = G.$$

Ainsi

$$\boxed{g_n \rightarrow g \text{ uniformément}}, \quad \boxed{g \in \mathcal{C}^1([a, b])}, \quad \boxed{g' = h}.$$

La question 12 montre précisément que l'hypothèse de convergence uniforme des dérivées ne peut pas être remplacée par la seule convergence uniforme des fonctions.

V Détecter la convergence uniforme sans connaître la limite

15

Supposons d'abord que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur E . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in E$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $p, q \geq N$, alors

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pour tout $x \in E$. La propriété de Cauchy uniforme est donc nécessaire.

Réciproquement, supposons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, q \geq N, \forall x \in E, |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Fixons $x \in E$. Pour ce x , la suite réelle $(f_n(x))$ est de Cauchy. Par complétude de $\mathbb{R}$, elle converge ; définissons

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Appliquons l'hypothèse de Cauchy uniforme avec $\varepsilon/2$. Il existe N tel que, pour $p, q \geq N$ et tout $x \in E$,

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons $n \geq N$ et $x \in E$. Pour tout $p \geq N$,

$$|f_n(x) - f_p(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Le même N convient à tous les x , donc $f_n \rightarrow f$ uniformément.

Ainsi

$$\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément} \iff (f_n) \text{ est de Cauchy uniformément.}}$$

La complétude de $\mathbb{R}$ intervient exactement lorsqu'on transforme, pour chaque x , la suite de Cauchy $(f_n(x))$ en une suite convergente.