

DM n°04 — Convergences simple et uniforme des suites de fonctions

Suites de fonctions · Convergence simple et uniforme · Convergence uniforme sur tout compact · Passage à la limite sous l'intégrale · Dérivation d'une limite · Critère de Cauchy uniforme

Une suite de fonctions peut tendre vers zéro en chaque point tout en conservant une bosse de hauteur fixe, une aire non nulle, ou même produire à la limite une discontinuité. À partir d'une même famille de fonctions, on cherchera ce qui distingue une convergence point par point d'un contrôle valable simultanément sur tout un intervalle. Les représentations graphiques et calculs numériques servent à observer ou conjecturer ; les conclusions demandées doivent être démontrées.

I Une bosse qui se resserre

On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction

$$\psi(t) = \begin{cases} t(2-t)^2, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

- 1 (a) Vérifier que ψ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $0 < t < 2$, calculer $\psi'(t)$ et dresser le tableau de variations de ψ .
- (b) Déterminer le maximum de ψ et le point où il est atteint.
- (c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) dt.$$

- 2 Pour tout entier $n \geq 2$, on définit sur $[0, 1]$

$$p_n(x) = \psi(nx).$$

- (a) Déterminer l'ensemble des $x \in [0, 1]$ pour lesquels $p_n(x) \neq 0$.

Représenter, à main levée ou à l'aide d'un logiciel, les fonctions p_2, p_5, p_{20} . Que suggère le dessin concernant la position et la hauteur de leur maximum ?

- (b) Pour chaque $x \in [0, 1]$ fixé, déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x).$$

- (c) Déterminer exactement le maximum de p_n sur $[0, 1]$ ainsi que le point x_n où il est atteint. Comparer ce résultat avec celui de la question précédente.

- 3 On pose

$$r_n = \frac{1}{n} p_n.$$

Démontrer directement la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in [0, 1], \quad |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Comparer le rôle joué ici par N avec celui du rang que l'on peut choisir à la question 2(b).

4 On considère maintenant

$$q_n = np_n.$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ fixé,

$$q_n(x) \longrightarrow 0.$$

(b) Calculer exactement

$$\int_0^1 q_n(x) dx.$$

(c) Pour chaque point x fixé, $q_n(x)$ tend vers 0. Que se passe-t-il pourtant pour l'aire située sous sa courbe ?

5 On définit enfin

$$H_n(x) = \frac{3}{4} \int_0^x q_n(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

(a) Montrer que $H_n(0) = 0$ et que

$$H_n(x) = 1 \quad \text{dès que} \quad x \geq \frac{2}{n}.$$

(b) Déterminer la limite de $H_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, pour chaque $x \in [0, 1]$ fixé. On notera cette limite $H(x)$.

(c) Justifier que toutes les fonctions H_n sont continues. La fonction H l'est-elle ?

II Un même rang pour tous les points ?

Soient E un ensemble non vide et $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que (f_n) **converge simplement** vers f sur E lorsque

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que (f_n) **converge uniformément** vers f sur E lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in E, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

6 (a) Quelle différence entre ces deux propriétés porte sur l'ordre des quantificateurs ? Dans laquelle d'entre elles le rang N peut-il dépendre du point x ?

(b) Montrer qu'une convergence uniforme est toujours simple.

- (c) Écrire, avec tous ses quantificateurs, la négation de l'affirmation : « (f_n) converge uniformément vers f sur E ».
- (d) Utiliser p_n pour vérifier directement cette négation. On pourra choisir une valeur fixe de ε et des points dépendant de n .

7 Pour une fonction bornée $h : E \rightarrow \mathbb{R}$, on note

$$\|h\|_{\infty, E} = \sup_{x \in E} |h(x)|.$$

On suppose, dans cette question, que $f_n - f$ est bornée sur E pour tout n .

- (a) Démontrer que

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{uniformément sur } E$$

si et seulement si

$$\|f_n - f\|_{\infty, E} \longrightarrow 0.$$

On veillera à ne pas supposer que le supremum est nécessairement atteint.

- (b) Calculer

$$\|p_n\|_{\infty, [0,1]}, \quad \|r_n\|_{\infty, [0,1]}, \quad \|q_n\|_{\infty, [0,1]}.$$

Retrouver ainsi les conclusions précédentes.

- (c) Montrer que

$$\|H_n - H\|_{\infty, [0,1]} = 1.$$

Ce supremum est-il atteint ?

8 Soit $a \in]0, 1]$.

- (a) Montrer qu'à partir d'un certain rang,

$$p_n = q_n = r_n = 0 \quad \text{sur } [a, 1],$$

et

$$H_n = H \quad \text{sur } [a, 1].$$

- (b) En déduire que ces suites convergent uniformément sur tout compact contenu dans $]0, 1]$, vers leurs limites simples respectives.

Cette propriété est appelée **convergence uniforme sur tout compact** de $]0, 1]$. Pourquoi cette conclusion n'est-elle pas contradictoire avec les échecs de convergence uniforme observés sur $[0, 1]$?

III Ce que permet la convergence uniforme

9 **Continuité de la limite.** Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$, convergeant uniformément vers une fonction f .

- (a) Démontrer que f est continue sur $[a, b]$.

On pourra, pour un point $x_0 \in [a, b]$, comparer $f(x)$ et $f(x_0)$ en faisant intervenir une même fonction f_N .

(b) Montrer que la suite (H_n) fournit un contre-exemple si l'on remplace « uniformément » par « simplement ».

(c) Dans la démonstration de (a), repérer précisément l'étape qui exige que le rang N puisse être choisi indépendamment de x .

10 Passage à la limite sous une intégrale. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, convergeant uniformément vers f .

(a) Démontrer

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]}.$$

En déduire que

$$\int_a^b f_n(x) dx \longrightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

(b) Expliquer pourquoi la suite (q_n) montre que la convergence simple ne suffit pas pour obtenir cette conclusion.

(c) La suite (p_n) converge-t-elle uniformément vers 0 ? Ses intégrales convergent-elles néanmoins vers l'intégrale de la limite ? Que peut-on en conclure sur le caractère nécessaire ou seulement suffisant de la convergence uniforme dans le résultat de (a) ?

11 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_{n,\alpha}(x) = n^\alpha p_n(x), \quad x \in [0, 1].$$

(a) Montrer que, pour toute valeur réelle de α ,

$$f_{n,\alpha}(x) \longrightarrow 0$$

pour chaque $x \in [0, 1]$ fixé.

(b) Calculer exactement

$$\|f_{n,\alpha}\|_{\infty, [0, 1]}$$

et déterminer pour quelles valeurs de α la convergence vers 0 est uniforme.

(c) Calculer

$$\int_0^1 f_{n,\alpha}(x) dx$$

et étudier sa limite suivant la valeur de α .

(d) Identifier les valeurs de α pour lesquelles la convergence n'est pas uniforme mais le passage à la limite sous l'intégrale reste valable, puis celles pour lesquelles la convergence simple subsiste alors que ce passage à la limite échoue.

IV Peut-on dériver une limite ?

On reprend

$$r_n(x) = \frac{1}{n} \psi(nx).$$

Pour une fonction définie sur $[0, 1]$, la dérivée en 0 désigne ici la dérivée à droite.

- 12 (a) Vérifier que $\psi'(2) = 0$ et que r_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
 (b) On sait que r_n converge uniformément vers la fonction nulle. Calculer $r'_n(0)$.
 (c) Comparer avec la dérivée de la fonction limite. Quelle affirmation trop forte cet exemple réfute-t-il ?
- 13 Soient $a < b$, $x_0 \in [a, b]$ et (g_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On suppose que

$$g_n(x_0) \longrightarrow \ell$$

et que la suite (g'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction h .

- (a) Montrer que h est continue.
 (b) On pose

$$G(x) = \ell + \int_{x_0}^x h(t) dt.$$

Établir, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|g_n(x) - G(x)| \leq |g_n(x_0) - \ell| + (b - a) \|g'_n - h\|_{\infty, [a, b]}.$$

En déduire que g_n converge uniformément vers G .

- (c) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $G' = h$.
- 14 On suppose maintenant que les fonctions g_n convergent simplement sur $[a, b]$ vers une fonction g , tandis que leurs dérivées g'_n convergent uniformément vers h . À l'aide de la question précédente, démontrer que

$$g_n \longrightarrow g \quad \text{uniformément sur } [a, b],$$

que g est de classe $\mathcal{C}^1$, et que

$$g' = h.$$

Comparer ce résultat avec la situation de la question 12.

V Détecter la convergence uniforme sans connaître la limite

- 15 Soit E un ensemble non vide et (f_n) une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$(f_n) \text{ converge uniformément sur } E$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall p, q \geq N, \quad \forall x \in E, \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

Pour la réciproque, on pourra utiliser le fait que toute suite de Cauchy de nombres réels converge.

Ce résultat est le **critère de Cauchy uniforme**.