

CORRIGÉ

Agrégation interne · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°07 — Formes quadratiques, réduction et classification des coniques

Changements de coordonnées et coniques · Matrices symétriques et réduction orthogonale · Formes quadratiques et méthode de Gauss · Loi d'inertie de Sylvester · Classification des coniques réelles · Invariants affines et matrice homogénéisée

Le calcul concret des premières questions fait apparaître deux opérations de nature différente : une rotation agit sur les directions de la partie quadratique, tandis qu'une translation agit sur les termes affines. La réduction des formes quadratiques permet ensuite de séparer ces rôles et d'identifier les invariants qui gouvernent la classification.

I Changer d'axes avant de changer de langage

1

Pour $\lambda = 0$,

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + \mu = 0$$

équivalent à

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 - \mu.$$

Ainsi, si $\mu < 2$, $\mathcal{C}_{0,\mu}$ est le cercle de centre $(-1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2 - \mu}$; si $\mu = 2$, $\mathcal{C}_{0,2} = \{(-1, -1)\}$; si $\mu > 2$, $\mathcal{C}_{0,\mu} = \emptyset$.

2

(a) Pour $\lambda = 1$,

$$(x + y)^2 + 2(x + y) + \mu = 0.$$

Avec $s = x + y$, cela donne

$$(s + 1)^2 = 1 - \mu.$$

Si $\mu < 1$, les deux valeurs $s = -1 \pm \sqrt{1 - \mu}$ donnent deux droites parallèles distinctes

$$x + y = -1 \pm \sqrt{1 - \mu}.$$

Si $\mu = 1$, on obtient la droite $x + y = -1$, comptée double dans l'équation quadratique. Si $\mu > 1$, il n'existe aucune valeur réelle de s et l'ensemble est vide.

(b) Les vecteurs

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad e_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$$

sont unitaires, orthogonaux et vérifient $\det(e_u, e_v) = 1$: ils forment donc une base orthonormée directe. Pour $X = (x, y)$,

$$u = \langle X, e_u \rangle = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad v = \langle X, e_v \rangle = \frac{-x+y}{\sqrt{2}},$$

ce sont bien les coordonnées de X dans ce repère. La base (e_u, e_v) s'obtient par rotation d'angle $\pi/4$ du repère initial.

Pour $\lambda = -1$,

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + \mu = 0,$$

soit

$$(x-y)^2 + 2(x+y) + \mu = 0.$$

Comme $x+y = \sqrt{2}u$ et $x-y = -\sqrt{2}v$, l'équation devient

$$2v^2 + 2\sqrt{2}u + \mu = 0,$$

c'est-à-dire

$$u = -\frac{v^2}{\sqrt{2}} - \frac{\mu}{2\sqrt{2}}.$$

C'est une parabole propre pour tout μ . Son sommet a pour coordonnées

$$(u_0, v_0) = \left(-\frac{\mu}{2\sqrt{2}}, 0 \right),$$

donc, dans le repère initial,

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{\mu}{4}, -\frac{\mu}{4} \right).$$

Son axe est la droite parallèle à $(1, 1)$ passant par le sommet, et la parabole s'ouvre dans le sens opposé au vecteur $(1, 1)$.

3

Pour $\lambda = 1/2$ et $\mu = 0$,

$$\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + 2\sqrt{2}u = 0.$$

On obtient

$$\frac{3}{2} \left(u + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \frac{1}{2}v^2 = \frac{4}{3},$$

puis

$$\frac{\left(u + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2}{8/9} + \frac{v^2}{8/3} = 1.$$

Le centre est $(-2\sqrt{2}/3, 0)$ dans le repère (u, v) , donc

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

dans le repère initial. Les directions des axes sont celles de $(1, 1)$ et $(-1, 1)$. Les demi-axes correspondants ont pour longueurs respectives

$$\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

4 _____

(a) Dans $q(X + h, Y + k)$, les termes de degré 2 proviennent uniquement de AX^2 , BXY et CY^2 ; les autres termes ont degré au plus 1. La partie homogène de degré 2 est donc

$$AX^2 + BXY + CY^2.$$

Une translation ne modifie donc pas la partie quadratique et, en particulier, ne peut annuler un coefficient B initialement non nul.

(b) En remplaçant x et y par

$$x = u \cos \theta - v \sin \theta, \quad y = u \sin \theta + v \cos \theta,$$

le coefficient de uv est

$$-2A \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta,$$

soit

$$(C - A) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta).$$

(c) Il faut donc annuler

$$(C - A) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta).$$

Si $A = C$ et $B = 0$, tout angle θ convient. Si $A = C$ et $B \neq 0$, il faut $\cos(2\theta) = 0$, donc

$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si $A \neq C$, l'annulation équivaut à

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C},$$

et cette équation possède des solutions, par exemple

$$2\theta = \arctan\left(\frac{B}{A - C}\right) + k\pi.$$

II La matrice de la partie quadratique

5

(a) On calcule

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

Si une matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ représente q , l'identification des coefficients impose $a = A$, $2b = B$ et $c = C$: la matrice est unique.

(b) Si $X = PY$, alors

$$q(X) = Y^T P^T S P Y.$$

La matrice dans les coordonnées Y est donc

$$S' = P^T S P.$$

(c) Si P est orthogonale, $P^T = P^{-1}$, donc

$$S' = P^{-1} S P.$$

La congruence est alors aussi une similitude. Une matrice diagonale représente une partie quadratique sans terme croisé ; diagonaliser orthogonalement S revient donc exactement à choisir des axes orthonormés dans lesquels le terme en uv disparaît.

6

(a) On a

$$\chi_S(t) = \det(tI_2 - S) = t^2 - (A + C)t + AC - \frac{B^2}{4}.$$

Son discriminant vaut

$$(A + C)^2 - 4AC + B^2 = (A - C)^2 + B^2 \geq 0.$$

Les deux valeurs propres de S sont donc réelles, éventuellement confondues.

(b) Si $Su = \lambda u$ et $Sv = \nu v$, alors, puisque S est symétrique,

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle Su, v \rangle = \langle u, Sv \rangle = \nu \langle u, v \rangle.$$

Lorsque $\lambda \neq \nu$, on en déduit $\langle u, v \rangle = 0$.

(c) Si S possède une valeur propre double, le discriminant précédent est nul. Ainsi $(A - C)^2 + B^2 = 0$, donc $A = C$ et $B = 0$. Par conséquent $S = AI_2$.

(d) Si les valeurs propres sont distinctes, on choisit un vecteur propre unitaire dans chacun des deux espaces propres ; la question précédente montre qu'ils forment une base orthonormée. Si la valeur propre est double, S est scalaire et toute base orthonormée est une base de vecteurs propres. Dans tous les cas, S est orthogonalement diagonalisable.

(e) Si une base orthonormée propre est indirecte, on remplace l'un de ses vecteurs par son opposé. Elle reste orthonormée et propre, mais devient directe. Sa matrice de passage appartient alors à $SO(2)$, donc est une matrice de rotation. Dans ce repère, S est diagonale : le coefficient du terme croisé est nul. On retrouve ainsi l'existence de l'angle θ de la question 4.

7

(a) À partir de $S' = P^T S P$,

$$\det S' = \det(P^T) \det S \det P = (\det P)^2 \det S.$$

Comme P est inversible, $(\det P)^2 > 0$, donc le signe de $\det S$ est conservé. De même,

$$\text{rang}(P^T S P) = \text{rang } S$$

car la multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible ne change pas le rang.

(b) On a

$$\det S = AC - \frac{B^2}{4},$$

d'où

$$\Delta_q = B^2 - 4AC = -4 \det S.$$

(c) Les valeurs propres réelles de S ont pour produit $\det S$. Si $\Delta_q < 0$, alors $\det S > 0$: les deux valeurs propres sont non nulles et de même signe, donc q est définie positive ou définie négative. Si $\Delta_q > 0$, alors $\det S < 0$: les valeurs propres sont de signes opposés, donc q est indéfinie. Enfin, si $\Delta_q = 0$, alors $\det S = 0$; comme $q \neq 0$, on a $S \neq 0$, donc $\text{rang } S = 1$.

(d) Avec la même partie quadratique $x^2 + y^2$, les équations

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0$$

définissent respectivement une ellipse particulière, à savoir un cercle, un point et l'ensemble vide. Avec la partie quadratique y^2 , les équations

$$y^2 - x = 0, \quad y^2 - 1 = 0, \quad y^2 + 1 = 0$$

définissent respectivement une parabole, deux droites parallèles et l'ensemble vide.

III Formes quadratiques, réduction et signature

8

(a) Par bilinéarité et symétrie,

$$q(x + y) = \varphi(x + y, x + y) = q(x) + q(y) + 2\varphi(x, y).$$

Ainsi

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)).$$

Cette formule détermine φ uniquement à partir de q , donc la forme bilinéaire symétrique associée est unique.(b) Dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on pose $s_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. La matrice $S_{\mathcal{B}} = (s_{ij})$ est symétrique et

$$q(X_{\mathcal{B}}) = X_{\mathcal{B}}^T S_{\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}}.$$

Pour un même vecteur, si $X_{\mathcal{B}} = PX_{\mathcal{B}'}$, alors

$$q = X_{\mathcal{B}'}^T P^T S_{\mathcal{B}} P X_{\mathcal{B}'},$$

d'où

$$S_{\mathcal{B}'} = P^T S_{\mathcal{B}} P.$$

(c) Dans la base $\mathcal{B}$, la condition $x \in \text{Rad}(q)$ s'écrit

$$X^T S_{\mathcal{B}} Y = 0 \quad \text{pour tout } Y.$$

Comme $S_{\mathcal{B}}$ est symétrique, cela équivaut à $S_{\mathcal{B}} X = 0$. Le radical correspond donc au noyau de $S_{\mathcal{B}}$ et, par le théorème du rang,

$$\dim \text{Rad}(q) = \dim E - \text{rang}(S_{\mathcal{B}}).$$

Le rang est conservé par congruence. Ainsi $\text{rang}(S_{\mathcal{B}})$ ne dépend pas de la base ; c'est le rang de q , et la formule précédente s'écrit aussi $\dim \text{Rad}(q) = \dim E - \text{rang}(q)$.

9

(a) On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$. Le résultat est immédiat pour $n = 0$ et pour la forme nulle. Supposons $q \neq 0$ et choisissons une base. Si l'un des coefficients de carré est non nul, on place la variable correspondante en première position. Si tous les coefficients de carré sont nuls, $q \neq 0$ impose l'existence d'un terme croisé non nul, c'est-à-dire de deux vecteurs de base e_i, e_j tels que $\varphi(e_i, e_j) \neq 0$. Alors

$$q(e_i + e_j) = 2\varphi(e_i, e_j) \neq 0,$$

et le remplacement de e_i par $e_i + e_j$ fournit une base dans laquelle un coefficient de carré est non nul.

Après permutation éventuelle, on peut donc écrire

$$q = ax_1^2 + x_1 L(x_2, \dots, x_n) + R(x_2, \dots, x_n), \quad a \neq 0.$$

En posant

$$u_1 = x_1 + \frac{L(x_2, \dots, x_n)}{2a},$$

on obtient

$$q = au_1^2 + R - \frac{L^2}{4a}.$$

Le changement $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (u_1, x_2, \dots, x_n)$ est linéaire et inversible, et le second terme est une forme quadratique en $n - 1$ variables. L'hypothèse de récurrence l'achève en une somme diagonale de carrés.

(b) L'identité

$$q_0(x, y, z) = \frac{1}{2}(x + y + 2z)^2 - \frac{1}{2}(x - y)^2 - 2z^2$$

se vérifie par développement. En posant

$$u = x + y + 2z, \quad v = x - y, \quad w = z,$$

la matrice du changement de coordonnées a pour déterminant -2 , donc il est inversible, et

$$q_0 = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - 2w^2.$$

10

À partir d'une forme diagonale, chaque coefficient positif λ est ramené à $+1$ par la substitution $U = \sqrt{\lambda}u$, et chaque coefficient négatif $-\nu$ à -1 par $V = \sqrt{\nu}v$. On obtient donc

$$q = u_1^2 + \cdots + u_{p_+}^2 - v_1^2 - \cdots - v_{p_-}^2,$$

les autres coordonnées appartenant au radical.

(a) Dans une base adaptée à cette forme réduite, notons $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de base correspondant aux coordonnées affichées. Posons E_+ égal au sous-espace engendré par les p_+ vecteurs associés aux termes positifs, E_- égal au sous-espace engendré par les p_- vecteurs associés aux termes négatifs, et $E_0 = \text{Rad}(q)$. La restriction de q à E_+ est définie positive. Si F est un sous-espace sur lequel la restriction de q est définie positive, alors

$$F \cap (E_- \oplus E_0) = \{0\},$$

car tout vecteur non nul de $E_- \oplus E_0$ vérifie $q(x) \leq 0$. Par la formule des dimensions,

$$\dim F + \dim(E_- \oplus E_0) \leq \dim E,$$

donc $\dim F \leq p_+$. Ainsi p_+ est la dimension maximale cherchée. De même, p_- est la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel la restriction de q est définie négative.

(b) Ces deux dimensions maximales sont définies intrinsèquement à partir de q , sans référence à une réduction particulière. Les entiers p_+ et p_- sont donc invariants : c'est la loi d'inertie de Sylvester.

(c) Dans la forme réduite, exactement $p_+ + p_-$ coefficients sont non nuls, donc

$$\text{rang}(q) = p_+ + p_-.$$

Deux formes quadratiques sur le même espace de dimension finie ayant la même signature ont aussi le même nombre de coordonnées nulles ; après réduction, elles s'écrivent donc toutes deux sous la même forme canonique. Elles sont congruentes. Réciproquement, une congruence ne change ni p_+ ni p_- d'après la question précédente.

(d) La réduction de q_0 obtenue à la question 9 comporte un coefficient positif et deux coefficients négatifs. Ainsi

$$\text{signature}(q_0) = (1, 2).$$

(e) Les deux formes ont la signature $(2, 0)$: elles sont congruentes. Par exemple, dans $x^2 + 4y^2$, le changement inversible $x = u$, $y = v/2$ donne $u^2 + v^2$. En revanche, sous un changement orthogonal la matrice est transformée par similitude et conserve donc son spectre. Les spectres $\{1, 4\}$ et $\{1, 1\}$ étant différents, les deux formes ne sont pas orthogonalement équivalentes.

Un changement linéaire inversible conserve donc le rang et la signature ; un changement orthogonal conserve en plus les valeurs propres et les données métriques qui en dépendent. Pour les coniques, une transformation affine peut modifier longueurs et angles, tandis qu'une transformation euclidienne, composée d'une translation et d'une transformation orthogonale, les préserve.

IV Le rôle des termes affines

11

- (a) En développant et en utilisant $S^T = S$,

$$f(Y + h) = Y^T SY + 2(Sh + \ell)^T Y + h^T Sh + 2\ell^T h + \gamma.$$

- (b) En soustrayant les expressions obtenues pour Y et $-Y$,

$$f(h + Y) - f(h - Y) = 4(Sh + \ell)^T Y.$$

Cette quantité est nulle pour tout Y si et seulement si $Sh + \ell = 0$.

- (c) Si S est inversible, ce système possède l'unique solution

$$h = -S^{-1}\ell.$$

12

- (a) Avec $h = -S^{-1}\ell$,

$$f(h + Y) = Y^T SY + \gamma - \ell^T S^{-1}\ell.$$

Ainsi $f(h + Y) = 0$ équivaut à

$$Y^T SY = \rho, \quad \rho = \ell^T S^{-1}\ell - \gamma.$$

- (b) Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que εS soit définie positive. Alors, pour $Y \neq 0$,

$$\varepsilon f(h + Y) - \varepsilon f(h) = Y^T (\varepsilon S) Y > 0.$$

Le centre h est donc l'unique minimiseur de εf . Après diagonalisation orthogonale de εS , l'équation s'écrit

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = \varepsilon \rho, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Si $\varepsilon \rho > 0$, on obtient une ellipse propre ; si $\rho = 0$, l'unique solution est le centre, donc un point ; si $\varepsilon \rho < 0$, l'ensemble est vide.

- (c) Si S est indéfinie, une base orthonormée permet d'écrire

$$\lambda u^2 - \nu v^2 = \rho, \quad \lambda, \nu > 0.$$

Si $\rho \neq 0$, après division par $|\rho|$ on obtient l'une des deux équations canoniques d'une hyperbole propre. Si $\rho = 0$,

$$(\sqrt{\lambda}u - \sqrt{\nu}v)(\sqrt{\lambda}u + \sqrt{\nu}v) = 0,$$

donc l'ensemble est la réunion de deux droites sécantes passant par le centre. Leurs directions sont exactement les directions isotropes non nulles de q , c'est-à-dire les vecteurs $Y \neq 0$ tels que $Y^T SY = 0$.

13

L'équation est

$$\sigma u^2 + 2\beta u + 2\eta v + \delta = 0.$$

Si $\eta \neq 0$, on pose $U = u + \beta/\sigma$; l'équation devient

$$\sigma U^2 + 2\eta v + \delta - \frac{\beta^2}{\sigma} = 0.$$

Une translation de v donne alors

$$\sigma U^2 + 2\eta V = 0,$$

soit $V = -\sigma U^2/(2\eta)$: c'est une parabole propre.

Si $\eta = 0$, on obtient

$$\sigma \left(u + \frac{\beta}{\sigma}\right)^2 + \delta - \frac{\beta^2}{\sigma} = 0,$$

donc, avec $U = u + \beta/\sigma$,

$$U^2 = \frac{\beta^2 - \sigma\delta}{\sigma^2}.$$

On a donc deux droites parallèles distinctes si $\beta^2 - \sigma\delta > 0$, une droite double si $\beta^2 - \sigma\delta = 0$, et l'ensemble vide si $\beta^2 - \sigma\delta < 0$.

Dans ces coordonnées, $\ker S$ est dirigé par l'axe v et η est la composante de ℓ suivant cette direction. Comme S est symétrique,

$$\operatorname{Im} S = (\ker S)^\perp.$$

Ainsi

$$\eta \neq 0 \iff \exists z \in \ker S, \ell^T z \neq 0 \iff \ell \notin \operatorname{Im} S.$$

Pour une partie quadratique de rang 1, ces conditions caractérisent exactement une parabole propre.

V Une matrice qui tient compte de toute l'équation

14

(a) Par multiplication matricielle,

$$\begin{pmatrix} X^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & \ell \\ \ell^T & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = X^T S X + 2\ell^T X + \gamma = f(X).$$

(b) Posons $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$. La relation $X = PY + h$ s'écrit

$$\tilde{X} = H\tilde{Y}, \quad H = \begin{pmatrix} P & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$g(Y) = f(PY + h) = \tilde{Y}^T H^T \mathcal{M}_f H \tilde{Y}.$$

Par unicité de la matrice symétrique représentant cette forme quadratique homogénéisée,

$$\mathcal{M}_g = H^T \mathcal{M}_f H.$$

(c) Comme P est inversible, H l'est aussi. La congruence précédente conserve donc le rang. De plus,

$$\det \mathcal{M}_g = \det(H^T) \det \mathcal{M}_f \det H = (\det P)^2 \det \mathcal{M}_f.$$

Le facteur $(\det P)^2$ étant strictement positif, la propriété $\det \mathcal{M}_f = 0$ est également invariante.

15

(a) Posons

$$K = \begin{pmatrix} I_2 & -S^{-1}\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme S est symétrique, S^{-1} l'est aussi, et un calcul par blocs donne

$$K^T \mathcal{M}_f K = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \gamma - \ell^T S^{-1} \ell \end{pmatrix}.$$

Or $\det K = 1$. En prenant les déterminants,

$$\det \mathcal{M}_f = \det S (\gamma - \ell^T S^{-1} \ell) = -\det S \rho.$$

(b) Dans les coordonnées de la question 13,

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \eta \\ \beta & \eta & \delta \end{pmatrix}.$$

Le développement suivant la deuxième ligne, ou suivant la deuxième colonne, donne

$$\det \mathcal{M}_f = -\sigma \eta^2.$$

(c) Si $\text{rang } S = 2$, alors $\det S \neq 0$ et

$$\det \mathcal{M}_f = 0 \iff \rho = 0.$$

Dans ce cas, la classification de la question 12 donne un point lorsque S est définie, et deux droites sécantes lorsque S est indéfinie. Si $\det \mathcal{M}_f \neq 0$, alors $\rho \neq 0$: on obtient une ellipse propre ou l'ensemble vide lorsque S est définie, selon le signe de $\varepsilon \rho$, et une hyperbole propre lorsque S est indéfinie.

Si $\text{rang } S = 1$, la formule $\det \mathcal{M}_f = -\sigma \eta^2$ montre que

$$\det \mathcal{M}_f \neq 0 \iff \eta \neq 0,$$

donc $\det \mathcal{M}_f \neq 0$ caractérise exactement la parabole propre. Lorsque $\det \mathcal{M}_f = 0$, on obtient deux droites parallèles, une droite double ou l'ensemble vide selon le signe de $\beta^2 - \sigma \delta$.

Enfin, $\det \mathcal{M}_f \neq 0$ ne garantit pas l'existence de points réels : l'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

a pour matrice homogénéisée I_3 , de déterminant 1, mais n'a aucune solution réelle.

VI Classification complète d'une famille

16

Pour

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

on vérifie

$$S_\lambda \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 + \lambda) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et

$$S_\lambda \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\det S_\lambda = 1 - \lambda^2, \quad \Delta_q = (2\lambda)^2 - 4 = 4(\lambda^2 - 1).$$

Enfin, par développement,

$$\det \mathcal{M}_{\lambda, \mu} = (1 - \lambda)((1 + \lambda)\mu - 2).$$

17

Dans les coordonnées orthonormées

$$u = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{-x + y}{\sqrt{2}},$$

l'équation devient

$$(1 + \lambda)u^2 + (1 - \lambda)v^2 + 2\sqrt{2}u + \mu = 0.$$

Les valeurs propres de S_λ donnent

$$\text{signature}(S_\lambda) = \begin{cases} (2, 0), & -1 < \lambda < 1, \\ (1, 1), & |\lambda| > 1, \\ (1, 0), & \lambda = \pm 1, \end{cases}$$

et

$$\text{rang } S_\lambda = \begin{cases} 2, & \lambda \neq \pm 1, \\ 1, & \lambda = \pm 1. \end{cases}$$

Pour $\lambda \neq -1$,

$$(1 + \lambda) \left(u + \frac{\sqrt{2}}{1 + \lambda} \right)^2 + (1 - \lambda)v^2 = \frac{2}{1 + \lambda} - \mu.$$

Si $\lambda \neq \pm 1$, le centre a donc pour coordonnées initiales

$$\left(-\frac{1}{1 + \lambda}, -\frac{1}{1 + \lambda} \right).$$

La relation

$$\det \mathcal{M}_{\lambda, \mu} = (1 - \lambda)((1 + \lambda)\mu - 2)$$

donne

$$\text{rang } \mathcal{M}_{\lambda, \mu} = \begin{cases} 3, & \lambda \neq 1 \text{ et } (1 + \lambda)\mu \neq 2, \\ 2, & \lambda \neq 1 \text{ et } (1 + \lambda)\mu = 2, \\ 2, & \lambda = 1 \text{ et } \mu \neq 1, \\ 1, & (\lambda, \mu) = (1, 1). \end{cases}$$

Pour $\lambda = -1$, la première ligne s'applique pour tout μ , donc $\mathcal{M}_{-1, \mu}$ est toujours de rang 3.

Les lieux de changement dans le plan des paramètres sont donc les droites $\lambda = -1$ et $\lambda = 1$, ainsi que la courbe

$$\mu = \frac{2}{1 + \lambda}, \quad \lambda \neq -1.$$

La classification complète est la suivante :

- si $-1 < \lambda < 1$ et $\mu < 2/(1 + \lambda)$: ellipse propre ;
- si $-1 < \lambda < 1$ et $\mu = 2/(1 + \lambda)$: un point ;
- si $-1 < \lambda < 1$ et $\mu > 2/(1 + \lambda)$: ensemble vide ;
- si $|\lambda| > 1$ et $\mu \neq 2/(1 + \lambda)$: hyperbole propre ;
- si $|\lambda| > 1$ et $\mu = 2/(1 + \lambda)$: deux droites sécantes ;
- si $\lambda = -1$: parabole propre pour tout μ ;
- si $\lambda = 1$ et $\mu < 1$: deux droites parallèles distinctes ;
- si $\lambda = 1$ et $\mu = 1$: une droite double ;
- si $\lambda = 1$ et $\mu > 1$: ensemble vide.

Pour $\lambda = -1$,

$$\ker S_{-1} = \text{Vect}(1, 1), \quad \ell = (1, 1) \notin \text{Im } S_{-1}.$$

Le terme affine possède donc une composante non nulle dans la direction du noyau : d'après la question 13, on obtient une parabole propre.

Pour $\lambda = 1$,

$$\ker S_1 = \text{Vect}(-1, 1), \quad \ell = (1, 1) \in \text{Im } S_1.$$

Il existe alors une translation qui annule les termes linéaires ; l'équation se réduit à

$$(x + y + 1)^2 = 1 - \mu.$$

On retrouve ainsi les trois cas : deux droites parallèles distinctes, une droite double ou l'ensemble vide. Ainsi $\Delta_q = 0$ signifie ici que la partie quadratique est de rang 1 ; cela ne suffit pas à conclure que la conique est une parabole.

18

Pour

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

on pose

$$S = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}, \quad \ell = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}, \quad \Delta_q = B^2 - 4AC = -4 \det S.$$

Comme $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, on a $\text{rang } S \in \{1, 2\}$.

- Si $\text{rang } S = 2$, le centre est unique : $h = -S^{-1}\ell$. On calcule

$$\rho = \ell^T S^{-1} \ell - F.$$

Si S est définie, on choisit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que εS soit définie positive : $\varepsilon \rho > 0$ donne une ellipse propre, $\rho = 0$ un point et $\varepsilon \rho < 0$ l'ensemble vide. Si S est indéfinie, $\rho \neq 0$ donne une hyperbole propre et $\rho = 0$ deux droites sécantes.

- Si $\text{rang } S = 1$, la question 15 donne un premier critère invariant : $\det \mathcal{M} \neq 0$ équivaut à $\ell \notin \text{Im } S$ et caractérise une parabole propre. Si $\det \mathcal{M} = 0$, alors $\ell \in \text{Im } S$; une translation convenable annule les termes linéaires et, après réduction orthogonale, l'équation devient $U^2 = c$. Selon que $c > 0$, $c = 0$ ou $c < 0$, on obtient deux droites parallèles, une droite double ou l'ensemble vide. Dans des coordonnées où l'équation est $\sigma u^2 + 2\beta u + \delta = 0$, le signe de c est celui de $\beta^2 - \sigma\delta$.

La matrice homogénéisée

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix}$$

apporte un contrôle invariant supplémentaire : son rang et la propriété $\det \mathcal{M} = 0$ sont conservés par tout changement affine inversible.

Une translation laisse S inchangée. Un changement orthogonal transforme S par similitude orthogonale : son spectre, les longueurs et les angles sont préservés. Sous un changement affine inversible $X = PY + h$, la partie quadratique devient $P^T S P$: le rang et la signature sont préservés, mais pas en général les valeurs propres ni les longueurs. La matrice homogénéisée est elle aussi transformée par congruence ; son rang et la propriété $\det \mathcal{M} = 0$ sont invariants.