

DM n°07 — Formes quadratiques, réduction et classification des coniques

Changements de coordonnées et coniques · Matrices symétriques et réduction orthogonale · Formes quadratiques et méthode de Gauss · Loi d'inertie de Sylvester · Classification des coniques réelles · Invariants affines et matrice homogénéisée

Dans une équation du second degré, un terme en xy peut masquer les directions privilégiées de la courbe, tandis que les termes de degré 1 déplacent son centre ou son sommet. On part de changements de coordonnées élémentaires pour faire émerger progressivement le langage des matrices symétriques et des formes quadratiques, puis l'utiliser pour classer rigoureusement les coniques, y compris les cas dégénérés.

Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on considère la courbe

$$\mathcal{C}_{\lambda, \mu} : x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x + 2y + \mu = 0.$$

I Changer d'axes avant de changer de langage

Un premier cas sans terme croisé

- 1 Déterminer, suivant la valeur de μ , la nature de l'ensemble $\mathcal{C}_{0, \mu}$. On précisera, lorsqu'il y a lieu, son centre et son rayon.

Deux valeurs singulières du paramètre

- 2 (a) On pose $s = x + y$. Ramener l'équation de $\mathcal{C}_{1, \mu}$ à une équation portant uniquement sur s , puis déterminer, suivant μ , l'ensemble des points (x, y) qui la satisfont. Identifier géométriquement les différents cas obtenus.
(b) Pour $\lambda = -1$, on considère le changement de coordonnées

$$u = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad e_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$$

forment une base orthonormée directe et que u, v sont les coordonnées du point dans le repère associé. Préciser l'angle de rotation de ce repère par rapport au repère initial. Dans ces coordonnées, réécrire l'équation de $\mathcal{C}_{-1, \mu}$ sous la forme canonique d'une parabole. En déduire son sommet, la direction de son axe et son sens d'ouverture.

Une ellipse dont les axes ne sont pas ceux du repère

- 3 Utiliser le changement de coordonnées de la question 2(b) pour transformer l'équation de $\mathcal{C}_{1/2, 0}$. La ramener à une équation de la forme

$$\frac{(u - u_0)^2}{a^2} + \frac{(v - v_0)^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$$

puis en déduire, dans le repère initial, son centre, les directions de ses axes et les longueurs de ses demi-axes.

Peut-on toujours faire disparaître xy ?

On considère

$$q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

où $A, B, C \in \mathbb{R}$, non tous nuls.

- 4 (a) On effectue une translation $x = X + h, y = Y + k$. Montrer que la partie homogène de degré 2 de $q(X + h, Y + k)$ est encore

$$AX^2 + BXY + CY^2.$$

En déduire qu'une translation ne peut faire disparaître un terme croisé non nul.

- (b) On effectue le changement orthogonal

$$x = u \cos \theta - v \sin \theta, \quad y = u \sin \theta + v \cos \theta.$$

Montrer que le coefficient de uv dans la nouvelle expression de q vaut

$$(C - A) \sin(2\theta) + B \cos(2\theta).$$

- (c) Montrer qu'il existe toujours un angle θ pour lequel ce coefficient est nul. Préciser les choix possibles lorsque $A = C$. Lorsque $A \neq C$, montrer que l'on peut choisir θ tel que

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C}.$$

IDÉE Le calcul précédent fonctionne, mais il ne fait pas encore apparaître ce qui est préservé lorsque l'on change de coordonnées.

II La matrice de la partie quadratique

Une écriture qui mémorise le terme croisé

On pose

$$S = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- 5 (a) Vérifier que $q(x, y) = X^T S X$. Expliquer pourquoi S est l'unique matrice symétrique possédant cette propriété.
- (b) Si $X = PY$, où $P \in GL_2(\mathbb{R})$, montrer que la matrice de q dans les nouvelles coordonnées est

$$S' = P^T S P.$$

Deux matrices reliées de cette manière sont dites congruentes.

- (c) Supposons P orthogonale. Montrer que la relation précédente se réécrit

$$S' = P^{-1}SP.$$

En déduire pourquoi diagonaliser orthogonalement S revient exactement à trouver des axes orthonormés faisant disparaître le terme croisé.

Pourquoi une matrice symétrique se réduit-elle orthogonalement en dimension 2 ?

- 6 (a) Calculer le polynôme caractéristique de S et montrer que son discriminant vaut

$$(A - C)^2 + B^2.$$

En déduire que les valeurs propres de S sont réelles.

- (b) Montrer que deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
 (c) Montrer que, si S possède une valeur propre double, alors S est une matrice scalaire.
 (d) En déduire que toute matrice symétrique réelle d'ordre 2 possède une base orthonormée de vecteurs propres.
 (e) Montrer que cette base peut être orientée de sorte que sa matrice de passage soit une rotation. Retrouver ainsi, sans nouveau développement algébrique, l'existence de l'angle θ de la question 4.

Ce que voit le discriminant

- 7 (a) À partir de la relation $S' = P^T SP$, établir

$$\det S' = (\det P)^2 \det S.$$

En déduire que le rang de S ainsi que le signe de $\det S$ sont invariants par changement linéaire inversible de coordonnées.

- (b) Relier le discriminant classique

$$\Delta_q = B^2 - 4AC$$

au déterminant de S .

- (c) Lorsque $q \neq 0$, montrer que

$$\Delta_q < 0 \Rightarrow q \text{ est définie positive ou définie négative,}$$

$$\Delta_q > 0 \Rightarrow q \text{ est indéfinie,}$$

$$\Delta_q = 0 \Rightarrow \text{rang } S = 1.$$

- (d) Donner des équations ayant exactement la même partie quadratique mais définissant respectivement une ellipse, un point et l'ensemble vide. Donner de même trois équations de partie quadratique de rang 1 définissant une parabole, deux droites parallèles et l'ensemble vide.

IDÉE La partie quadratique détermine une grande partie de la géométrie, mais elle ne suffit pas à elle seule.

III Formes quadratiques, réduction et signature

Soit désormais E un espace vectoriel réel de dimension finie. Une forme quadratique sur E est une application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une forme bilinéaire symétrique φ telle que

$$q(x) = \varphi(x, x).$$

Retrouver la forme bilinéaire

- 8 (a) Montrer que nécessairement

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)).$$

En déduire l'unicité de φ .

- (b) Dans une base $\mathcal{B}$ de E , montrer que q s'écrit

$$q(X_{\mathcal{B}}) = X_{\mathcal{B}}^T S_{\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}}$$

avec $S_{\mathcal{B}}$ symétrique. Si $X_{\mathcal{B}} = P X_{\mathcal{B}'}$ pour les colonnes de coordonnées d'un même vecteur dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, montrer que

$$S_{\mathcal{B}'} = P^T S_{\mathcal{B}} P.$$

- (c) On appelle radical de q l'espace

$$\text{Rad}(q) = \{x \in E : \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}.$$

Montrer que

$$\dim \text{Rad}(q) = \dim E - \text{rang}(S_{\mathcal{B}}),$$

puis en déduire que le rang de $S_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de la base. On l'appelle le rang de q .

La méthode de Gauss

On pourra utiliser les deux mécanismes suivants :

$$ax_1^2 + x_1L + R = a \left(x_1 + \frac{L}{2a} \right)^2 + R - \frac{L^2}{4a}, \quad a \neq 0,$$

et

$$xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2).$$

- 9 (a) Montrer, par récurrence sur la dimension, que toute forme quadratique réelle peut être transformée par un changement linéaire inversible de coordonnées en

$$\lambda_1 u_1^2 + \cdots + \lambda_r u_r^2, \quad \lambda_i \neq 0.$$

- (b) Trouver un changement linéaire inversible de coordonnées qui transforme

$$q_0(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

en une forme diagonale, et donner explicitement cette forme.

Loi d'inertie

À partir d'une réduction diagonale, montrer qu'un changement d'échelle des coordonnées permet d'écrire

$$q = u_1^2 + \cdots + u_{p_+}^2 - v_1^2 - \cdots - v_{p_-}^2,$$

les autres coordonnées éventuelles n'intervenant pas. On appelle signature de q le couple (p_+, p_-) .

- 10 (a) Montrer que p_+ est la dimension maximale d'un sous-espace de E sur lequel la restriction de q est définie positive. Donner l'énoncé analogue pour p_- .
- (b) En déduire que p_+ et p_- ne dépendent pas de la réduction choisie. C'est la loi d'inertie de Sylvester.
- (c) Montrer que

$$\text{rang}(q) = p_+ + p_-.$$

En déduire que, sur un même espace vectoriel réel de dimension finie, deux formes quadratiques sont congruentes si et seulement si elles ont la même signature.

- (d) Déterminer la signature de q_0 .
- (e) Les deux formes $x^2 + 4y^2$ et $x^2 + y^2$ sont-elles congruentes ? Peuvent-elles être transformées l'une en l'autre par un changement orthogonal de coordonnées ? En déduire quelles informations un changement linéaire inversible conserve et quelles informations un changement orthogonal conserve en plus. Relier cette distinction aux classifications affine et euclidienne des coniques.

IV Le rôle des termes affines

On considère maintenant

$$f(X) = X^T S X + 2\ell^T X + \gamma,$$

où $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est non nulle et $\ell \in \mathbb{R}^2$.

Translation et centre

- 11 (a) Pour $X = Y + h$, établir

$$f(Y + h) = Y^T S Y + 2(S h + \ell)^T Y + h^T S h + 2\ell^T h + \gamma.$$

- (b) On appelle centre de l'équation un point h tel que

$$f(h + Y) = f(h - Y) \quad \text{pour tout } Y \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que cette condition équivaut à $S h + \ell = 0$.

- (c) En déduire que, lorsque S est inversible, il existe un unique centre,

$$h = -S^{-1}\ell.$$

Le cas où la partie quadratique est de rang 2

On suppose S inversible et on pose

$$\rho = \ell^T S^{-1} \ell - \gamma.$$

- 12 (a) Montrer qu'après translation au centre l'équation $f(X) = 0$ devient

$$Y^T SY = \rho.$$

- (b) Supposons que la forme quadratique $Y \mapsto Y^T SY$ soit définie, c'est-à-dire définie positive ou définie négative. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ choisi de sorte que εS soit définie positive. Montrer que le centre est l'unique point où εf atteint son minimum, puis classifier l'ensemble $f(X) = 0$ suivant le signe de $\varepsilon \rho$.
- (c) Supposons S indéfinie. Classifier $f(X) = 0$ suivant que ρ est nul ou non nul. Interpréter géométriquement, lorsque $\rho = 0$, les vecteurs non nuls Y tels que $Y^T SY = 0$.

Le cas où la partie quadratique est de rang 1

Après changement orthogonal de coordonnées, on peut écrire

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma \neq 0,$$

et l'équation sous la forme

$$\sigma u^2 + 2\beta u + 2\eta v + \delta = 0.$$

- 13 Distinguer les cas $\eta \neq 0$ et $\eta = 0$. Dans chacun d'eux, ramener l'équation par des translations à une forme canonique et identifier l'ensemble obtenu ; dans le cas $\eta = 0$, on fera intervenir le signe de $\beta^2 - \sigma\delta$. Traduire enfin, sans faire référence à la base choisie, la condition qui caractérise le cas d'une parabole propre, à l'aide de $\ker S$ ou de $\operatorname{Im} S$.

V Une matrice qui tient compte de toute l'équation

Homogénéiser l'équation

À

$$f(X) = X^T SX + 2\ell^T X + \gamma$$

on associe

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} S & \ell \\ \ell^T & \gamma \end{pmatrix}.$$

- 14 (a) Montrer que

$$f(X) = \begin{pmatrix} X^T & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M}_f \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Pour le changement affine

$$X = PY + h, \quad P \in GL_2(\mathbb{R}),$$

on définit $g(Y) = f(PY + h)$ et

$$H = \begin{pmatrix} P & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\mathcal{M}_g = H^T \mathcal{M}_f H.$$

(c) En déduire que le rang de $\mathcal{M}_f$ et la propriété $\det \mathcal{M}_f = 0$ sont invariants par changement affine inversible de coordonnées.

Ce que détecte le déterminant homogène

15 (a) Lorsque S est inversible, montrer que

$$\det \mathcal{M}_f = \det S(\gamma - \ell^T S^{-1} \ell) = -\det S \rho.$$

(b) Dans les coordonnées de la question 13, montrer que

$$\det \mathcal{M}_f = -\sigma \eta^2.$$

(c) Interpréter, dans les cas $\text{rang } S = 2$ puis $\text{rang } S = 1$, ce que les conditions $\det \mathcal{M}_f = 0$ ou $\det \mathcal{M}_f \neq 0$ permettent de lire dans la classification obtenue aux questions 12 et 13. La condition $\det \mathcal{M}_f \neq 0$ garantit-elle l'existence de points réels ? Justifier.

VI Classification complète d'une famille

Les deux matrices de $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$

16 Montrer que

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

admet pour vecteurs propres

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec pour valeurs propres respectives $1 + \lambda$ et $1 - \lambda$. Calculer $\det S_\lambda$, Δ_q , puis $\det \mathcal{M}_{\lambda,\mu}$ où

$$\mathcal{M}_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Classification dans le plan des paramètres

17 Classifier entièrement $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ pour tous les couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Décrire dans le plan des paramètres les lieux où changent

$$\text{rang } S_\lambda, \quad \text{signature } S_\lambda, \quad \text{rang } \mathcal{M}_{\lambda,\mu},$$

puis dresser une classification faisant apparaître précisément les régions ou frontières correspondant à une ellipse, une hyperbole, une parabole, un point, l'ensemble vide, deux droites sécantes, deux droites parallèles ou une droite double. Expliquer notamment pourquoi $\lambda = -1$ et $\lambda = 1$ ont le même discriminant quadratique nul mais des comportements géométriques très différents.

Retour à l'équation générale

18 Soit

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Construire un arbre de décision permettant de classer cette équation à partir de

$$S = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}, \quad \ell = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix}.$$

L'arbre distinguera notamment les cas $\text{rang } S = 2$ et $\text{rang } S = 1$ et indiquera, dans chaque branche, les critères nécessaires pour identifier la conique ou le cas dégénéré. Distinguer enfin ce qui est préservé par une translation, par un changement orthogonal de repère et par un changement affine inversible de coordonnées.