

CORRIGÉ

Agrégation interne · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°08 — Du fini au continu :
Fourier et principes
d'incertitudeGroupes et caractères · Séries de
Fourier · Transformée de Fourier ·
Convolution · Plancherel ·
Principes d'incertitudeI Le premier laboratoire : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1

(a) Pour tout $f \in \mathcal{F}_n$ et tout $x \in G_n$,

$$(\tau_0 f)(x) = f(x),$$

donc $\tau_0 = \text{Id}$. De plus,

$$(\tau_a \tau_b f)(x) = (\tau_b f)(x - a) = f(x - a - b) = (\tau_{a+b} f)(x).$$

Ainsi

$$\tau_a \tau_b = \tau_{a+b}.$$

(b) La translation $x \mapsto x - a$ est une permutation de G_n . Par changement d'indice dans une somme finie,

$$\begin{aligned} \|\tau_a f\|_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_{x \in G_n} |f(x - a)|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{y \in G_n} |f(y)|^2 = \|f\|_n^2. \end{aligned}$$

Les deux normes étant positives ou nulles,

$$\|\tau_a f\|_n = \|f\|_n.$$

2

(a) Comme $f \neq 0$, sa norme est strictement positive. L'égalité

$$\tau_a f = \lambda(a) f$$

et la question 1(b) donnent

$$\|f\|_n = \|\tau_a f\|_n = |\lambda(a)| \|f\|_n.$$

On en déduit

$$|\lambda(a)| = 1.$$

D'autre part,

$$\tau_{a+b}f = \tau_a(\tau_b f) = \tau_a(\lambda(b)f) = \lambda(b)\lambda(a)f.$$

Comme $f \neq 0$,

$$\boxed{\lambda(a+b) = \lambda(a)\lambda(b).}$$

Ainsi λ est un morphisme de groupes de G_n dans $\mathbb{U}$.

(b) Tout élément de G_n est un multiple de 1. Posons $z = \lambda(1)$. Pour tout entier a ,

$$\lambda(a) = z^a.$$

Comme $n \cdot 1 = 0$ dans G_n ,

$$1 = \lambda(0) = \lambda(n) = z^n.$$

Le nombre z est donc une racine n -ième de l'unité. Il existe un unique $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que

$$z = \omega^{-k}.$$

Par conséquent

$$\boxed{\lambda(a) = \omega^{-ka}.$$

(c) Si $f(0) = 0$, alors, pour tout $x \in G_n$,

$$f(x) = (\tau_{-x}f)(0) = \lambda(-x)f(0) = 0,$$

ce qui contredit $f \neq 0$. Ainsi $f(0) \neq 0$.

Pour tout x ,

$$f(x) = (\tau_{-x}f)(0) = \lambda(-x)f(0) = \omega^{kx}f(0).$$

Donc

$$\boxed{f = f(0)\chi_k.}$$

Si x est remplacé par $x + n$, la valeur ω^{kx} est multipliée par $\omega^{kn} = 1$; la fonction χ_k est donc bien définie sur G_n . Enfin,

$$(\tau_a \chi_k)(x) = \chi_k(x - a) = \omega^{k(x-a)} = \omega^{-ka} \chi_k(x),$$

d'où

$$\boxed{\tau_a \chi_k = \omega^{-ka} \chi_k.}$$

Éclairage. Le calcul précédent ne choisit pas les exponentielles parce qu'elles sont commodess : elles sont imposées par la structure des translations. Les fréquences sont les directions propres communes à toutes les translations.

3

(a) Si n divise m , alors $\omega^m = 1$ et

$$\sum_{x=0}^{n-1} \omega^{mx} = n.$$

Si n ne divise pas m , alors $\omega^m \neq 1$ et la somme géométrique donne

$$\sum_{x=0}^{n-1} \omega^{mx} = \frac{1 - (\omega^m)^n}{1 - \omega^m} = \frac{1 - \omega^{mn}}{1 - \omega^m} = 0.$$

Ainsi

$$\sum_{x=0}^{n-1} \omega^{mx} = \begin{cases} n, & n \mid m, \\ 0, & n \nmid m. \end{cases}$$

(b) Comme $\overline{\omega^{\ell x}} = \omega^{-\ell x}$,

$$\langle \chi_k, \chi_\ell \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} \omega^{(k-\ell)x}.$$

Pour $k, \ell \in \{0, \dots, n-1\}$, l'entier $k - \ell$ est divisible par n si et seulement si $k = \ell$. La question précédente donne donc

$$\langle \chi_k, \chi_\ell \rangle_n = \begin{cases} 1, & k = \ell, \\ 0, & k \neq \ell. \end{cases}$$

La famille contient n vecteurs orthonormés. Or $\mathcal{F}_n$ est de dimension n , puisqu'une fonction sur G_n est déterminée par ses n valeurs. La famille $(\chi_0, \dots, \chi_{n-1})$ est donc une base orthonormée.

(c) Dans une base orthonormée, tout vecteur est la somme de ses coordonnées multipliées par les vecteurs de base. Ainsi

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \chi_k \rangle_n \chi_k = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \chi_k.$$

En évaluant en x ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \omega^{kx}.$$

L'identité de Parseval dans une base orthonormée donne

$$\|f\|_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\langle f, \chi_k \rangle_n|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Comme

$$\|f\|_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{x \in G_n} |f(x)|^2,$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{x \in G_n} |f(x)|^2.$$

4

(a) Par définition,

$$\widehat{\tau_a f}(k) = \frac{1}{n} \sum_{x \in G_n} f(x-a) \omega^{-kx}.$$

Posons $y = x - a$. Lorsque x parcourt G_n , y aussi. Alors

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_a f}(k) &= \frac{1}{n} \sum_{y \in G_n} f(y) \omega^{-k(y+a)} \\ &= \omega^{-ka} \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Donc

$$\widehat{\tau_a f}(k) = \omega^{-ka} \widehat{f}(k).$$

(b) On calcule

$$\begin{aligned} \widehat{f *_n g}(k) &= \frac{1}{n} \sum_{x \in G_n} (f *_n g)(x) \omega^{-kx} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{x \in G_n} \sum_{y \in G_n} f(y) g(x-y) \omega^{-kx}. \end{aligned}$$

Posons $z = x - y$, donc $x = y + z$. Les deux variables y, z parcourent indépendamment G_n :

$$\begin{aligned} \widehat{f *_n g}(k) &= \frac{1}{n^2} \sum_{y, z \in G_n} f(y) g(z) \omega^{-k(y+z)} \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_y f(y) \omega^{-ky} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_z g(z) \omega^{-kz} \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\widehat{f *_n g}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{g}(k).$$

(c) La question 2(c) montre qu'une translation agit sur chaque caractère par multiplication par le scalaire ω^{-ka} . La question 4(a) exprime la même propriété sur les coefficients de Fourier : traduire f multiplie son coefficient de fréquence k par ce même scalaire.

La question 4(b) montre par ailleurs que la convolution, opération couplée dans la variable x , devient une simple multiplication fréquence par fréquence. Les caractères fournissent donc des coordonnées simultanément adaptées aux translations et à la convolution.

5

(a) Posons $S = \text{supp } f$, avec $|S| = s$. Pour tout k ,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{n} \sum_{x \in S} f(x) \omega^{-kx}.$$

Comme $|\omega^{-kx}| = 1$, Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &\leq \frac{1}{n} \sum_{x \in S} |f(x)| \\ &\leq \frac{1}{n} \sqrt{s} \left(\sum_{x \in S} |f(x)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{s}{n}} \|f\|_n. \end{aligned}$$

Donc

$$|\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{s}{n} \|f\|_n^2.$$

Si $T = \text{supp } \widehat{f}$ et $|T| = t$, alors Parseval donne

$$\|f\|_n^2 = \sum_{k \in T} |\widehat{f}(k)|^2 \leq t \frac{s}{n} \|f\|_n^2.$$

Comme $f \neq 0$, $\|f\|_n^2 > 0$. On peut simplifier :

$$1 \leq \frac{st}{n},$$

d'où

$$st \geq n.$$

(b) Pour $f = \delta_0$,

$$\widehat{\delta_0}(k) = \frac{1}{n}$$

pour tout k . Ainsi

$$|\text{supp } \delta_0| = 1, \quad |\text{supp } \widehat{\delta_0}| = n,$$

et le produit vaut n .

Si $f(x) = c$ avec $c \neq 0$, alors

$$\widehat{f}(k) = \frac{c}{n} \sum_{x=0}^{n-1} \omega^{-kx}.$$

La question 3(a) donne

$$\widehat{f}(0) = c, \quad \widehat{f}(k) = 0 \quad (k \neq 0).$$

Donc

$$|\text{supp } f| = n, \quad |\text{supp } \widehat{f}| = 1,$$

et l'égalité est encore atteinte.

(c) Une fonction non nulle ne peut pas être simultanément concentrée sur très peu de points du groupe et sur très peu de fréquences. Plus son support spatial est petit, plus son support fréquentiel doit être grand, et réciproquement.

6

(a) Pour $x \in G$,

$$(\tau_a \chi)(x) = \chi(x - a) = \chi(x) \chi(-a).$$

Comme $\chi(a) \in \mathbb{U}$,

$$\chi(-a) = \chi(a)^{-1} = \overline{\chi(a)}.$$

Ainsi

$$\tau_a \chi = \overline{\chi(a)} \chi.$$

(b) Puisque les caractères forment une base orthonormée,

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f, \chi \rangle_G \chi.$$

Avec la notation proposée,

$$f(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x).$$

Parseval devient

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2.$$

(c) On calcule exactement comme dans la question 4 :

$$\widehat{f *_G g}(\chi) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{x, y \in G} f(y) g(x - y) \overline{\chi(x)}.$$

Avec $z = x - y$ et la relation $\chi(y + z) = \chi(y) \chi(z)$,

$$\overline{\chi(y + z)} = \overline{\chi(y)} \overline{\chi(z)}.$$

La somme double se factorise et donne

$$\widehat{f *_G g}(\chi) = \hat{f}(\chi) \hat{g}(\chi).$$

Pour l'incertitude, si $S = \text{supp } f$ et $s = |S|$, alors, pour tout caractère χ ,

$$|\hat{f}(\chi)| \leq \frac{1}{|G|} \sqrt{s} \left(\sum_{x \in G} |f(x)|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{s}{|G|}} \|f\|_G.$$

Si $t = |\operatorname{supp} \widehat{f}|$, Parseval donne

$$\|f\|_G^2 \leq t \frac{s}{|G|} \|f\|_G^2.$$

Pour $f \neq 0$,

$$|\operatorname{supp} f| |\operatorname{supp} \widehat{f}| \geq |G|.$$

Synthèse. La cyclicité a permis d'écrire explicitement les caractères à l'aide des racines de l'unité. La structure qui gouverne Fourier est plus générale : sur tout groupe abélien fini, les caractères diagonalisaient déjà toutes les translations et transformaient la convolution en multiplication.

II Quand le groupe devient continu et compact : le cercle

7

Si $[x] = [y]$ dans $\mathbb{T}$, alors $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc $e^{ix} = e^{iy}$. L'application Φ est donc bien définie.

Pour $[x], [y] \in \mathbb{T}$,

$$\Phi([x] + [y]) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = \Phi([x]) \Phi([y]),$$

donc Φ est un morphisme de groupes.

Elle est surjective puisque tout élément de $\mathbb{U}$ s'écrit e^{ix} pour un certain réel x . Enfin,

$$\Phi([x]) = 1 \iff e^{ix} = 1 \iff x \in 2\pi\mathbb{Z} \iff [x] = [0].$$

Son noyau est réduit à l'élément neutre ; elle est donc injective. Ainsi

$$\mathbb{T} \simeq \mathbb{U}.$$

8

Les intégrales complexes utilisées dans cette question sont, conformément à la définition de l'énoncé, prises composante par composante : si $h = u + iv$, alors

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Le théorème fondamental de l'analyse s'applique donc séparément aux parties réelle et imaginaire.

(a) Comme ψ est un morphisme,

$$\psi(0) = \psi(0 + 0) = \psi(0)^2.$$

Or $\psi(0) \in \mathbb{U}$, donc $\psi(0) \neq 0$ et

$$\psi(0) = 1.$$

La fonction F est dérivable et $F'(x) = \psi(x)$ par le théorème fondamental de l'analyse. En particulier,

$$F'(0) = 1.$$

Ainsi

$$\frac{F(a) - F(0)}{a} \longrightarrow 1$$

lorsque $a \rightarrow 0$, $a \neq 0$. Comme $F(0) = 0$, il existe donc des réels $a \neq 0$ arbitrairement petits tels que $F(a) \neq 0$.

(b) Par changement de variable $t = x + u$,

$$\begin{aligned} F(x+a) - F(x) &= \int_x^{x+a} \psi(t) dt \\ &= \int_0^a \psi(x+u) du \\ &= \psi(x) \int_0^a \psi(u) du \\ &= \psi(x) F(a). \end{aligned}$$

Comme $F(a) \neq 0$,

$$\psi(x) = \frac{F(x+a) - F(x)}{F(a)}.$$

Le membre de droite est dérivable puisque F l'est. Ainsi ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(c) Pour x fixé,

$$\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y).$$

En dérivant par rapport à y en 0,

$$\psi'(x) = \psi(x)\psi'(0).$$

Si

$$c = \psi'(0),$$

alors

$$\boxed{\psi'(x) = c\psi(x).}$$

Comme $|\psi(x)|^2 = 1$ pour tout x ,

$$\psi(x)\overline{\psi(x)} = 1.$$

En dérivant en $x = 0$,

$$c\overline{\psi(0)} + \psi(0)\bar{c} = 0.$$

Puisque $\psi(0) = 1$,

$$c + \bar{c} = 0,$$

c'est-à-dire $\operatorname{Re} c = 0$. Il existe donc un réel α tel que

$$\boxed{c = i\alpha.}$$

(d) L'équation différentielle devient

$$\psi' = i\alpha\psi, \quad \psi(0) = 1.$$

Sa solution unique est

$$\boxed{\psi(x) = e^{i\alpha x}.$$

L'unicité de α résulte par exemple de la dérivée en 0 : $i\alpha = \psi'(0)$.

9

(a) L'application $\chi \circ \pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$ est un morphisme continu. D'après la question 8, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\chi(\pi(x)) = e^{i\alpha x}.$$

(b) Comme $\pi(x + 2\pi) = \pi(x)$,

$$e^{i\alpha(x+2\pi)} = e^{i\alpha x}.$$

Après simplification,

$$e^{2i\pi\alpha} = 1,$$

ce qui équivaut à

$$\alpha \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi tout caractère continu de $\mathbb{T}$ est de la forme

$$\chi_k([x]) = e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement, chaque χ_k est bien définie sur les classes modulo 2π , continue, et vérifie

$$\chi_k([x] + [y]) = \chi_k([x])\chi_k([y]).$$

Les caractères continus sont donc exactement ceux-là. L'application

$$k \longmapsto \chi_k$$

est un isomorphisme entre $(\mathbb{Z}, +)$ et le groupe des caractères continus de $\mathbb{T}$, muni de la multiplication point par point. Ainsi

$$\boxed{\widehat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}.$$

10

(a) Pour $k, \ell \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e^{ik\cdot}, e^{i\ell\cdot} \rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)x} dx.$$

Si $k = \ell$, l'intégrale vaut 2π . Si $k \neq \ell$,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)x} dx = \left[\frac{e^{i(k-\ell)x}}{i(k-\ell)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Donc

$$\langle e^{ik\cdot}, e^{i\ell\cdot} \rangle_{\mathbb{T}} = \delta_{k\ell}.$$

(b) Avec la normalisation choisie, les relations admises s'écrivent

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

La forme est identique à celle de la question 3(c) : une fonction est reconstruite comme combinaison de caractères et son énergie quadratique est la somme des carrés des modules de ses coordonnées de Fourier. Seul l'ensemble des fréquences a changé : il était fini et devient $\mathbb{Z}$.

(c) On a

$$c_k(\tau_a f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-a) e^{-ikx} dx.$$

En posant $y = x - a$,

$$c_k(\tau_a f) = \frac{e^{-ika}}{2\pi} \int_{-a}^{2\pi-a} f(y) e^{-iky} dy.$$

La fonction $y \mapsto f(y) e^{-iky}$ est 2π -périodique. Son intégrale sur tout intervalle de longueur 2π est donc la même. Ainsi

$$c_k(\tau_a f) = e^{-ika} c_k(f).$$

(d) On écrit

$$c_k(f *_{\mathbb{T}} g) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y) e^{-ikx} dy dx.$$

Les fonctions étant continues sur le compact considéré, Fubini s'applique. Pour y fixé, posons $u = x - y$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(x-y) e^{-ikx} dx &= e^{-iky} \int_{-y}^{2\pi-y} g(u) e^{-iku} du \\ &= e^{-iky} \int_0^{2\pi} g(u) e^{-iku} du, \end{aligned}$$

par périodicité. On obtient donc

$$c_k(f *_{\mathbb{T}} g) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(u) e^{-iku} du \right),$$

d'où

$$c_k(f *_{\mathbb{T}} g) = c_k(f) c_k(g).$$

11

Si $j' = j + qn$ représente la même classe que j modulo n , alors

$$f\left(\frac{2\pi j'}{n}\right) = f\left(\frac{2\pi j}{n} + 2\pi q\right) = f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$$

par 2π -périodicité. La fonction f_n est donc bien définie sur G_n .

(a) La transformée sur G_n est définie par

$$\widehat{f_n}([k]_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_n(j) e^{-2i\pi k j/n}.$$

En remplaçant $f_n(j)$ par sa définition,

$$\widehat{f_n}([k]_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{-2i\pi k j/n}.$$

(b) Posons

$$h(x) = f(x) e^{-ikx}.$$

Cette fonction est continue et 2π -périodique. L'expression précédente peut s'écrire

$$\widehat{f_n}([k]_n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} h\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \frac{2\pi}{n}.$$

Il s'agit de la somme de Riemann associée à la subdivision régulière de $[0, 2\pi]$. Par continuité de h ,

$$\widehat{f_n}([k]_n) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x) dx = c_k(f).$$

Ainsi

$$\widehat{f_n}([k]_n) \longrightarrow c_k(f).$$

(c) Pour chaque entier k fixé, le coefficient discret correspondant à la classe de k modulo n converge vers le coefficient de Fourier continu d'indice k lorsque l'échantillonnage devient de plus en plus fin.

Ce résultat est ponctuel en fréquence : k reste fixé pendant que n varie. Il ne donne ni une convergence uniforme de toutes les fréquences à la fois, ni une convergence d'opérateurs, ni une identification de leurs domaines, ni une convergence de séries complètes. Il fournit un pont analytique précis entre les deux constructions, sans constituer à lui seul une théorie générale de passage à la limite.

III Quand la compacité disparaît : la droite réelle

12

(a) D'après la question 8, tout caractère continu de $(\mathbb{R}, +)$ est de la forme

$$x \mapsto e^{i\alpha x}$$

pour un unique $\alpha \in \mathbb{R}$. En écrivant

$$\alpha = 2\pi\xi,$$

on obtient

$$\chi_\xi(x) = e^{2i\pi\xi x}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

La multiplication point par point vérifie

$$\chi_\xi \chi_\eta = \chi_{\xi+\eta}.$$

L'application $\xi \mapsto \chi_\xi$ est donc un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ vers son groupe de caractères continus :

$$\widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}.$$

(b) Dans la partie I,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{n} \sum_{x \in G_n} f(x) \overline{\chi_k(x)}.$$

Sur le cercle,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{e^{ikx}} dx.$$

Sur $\mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\chi_\xi(x)} dx.$$

Dans les trois cas, un coefficient de Fourier mesure donc la composante de f dans la direction du caractère correspondant. La différence somme finie, série ou fonction de la variable fréquentielle vient du groupe des caractères disponible dans chaque situation.

13

(a) Pour $0 \leq j \leq 3$,

$$|f^{(j)}(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^2}.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} < +\infty.$$

Donc f, f', f'', f''' sont absolument intégrables.

De plus,

$$|f(x)|^2 + |f'(x)|^2 \leq \frac{2C^2}{(1+x^2)^4},$$

et le membre de droite est intégrable, donc f et f' sont de carré intégrable.

Enfin,

$$|xf(x)| \leq C \frac{|x|}{(1+x^2)^2},$$

et

$$|xf(x)|^2 \leq C^2 \frac{x^2}{(1+x^2)^4}.$$

Ces deux fonctions majorantes sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Ainsi xf est absolument intégrable et de carré intégrable.

(b) Par changement de variable $y = x - a$,

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_a f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-a) e^{-2i\pi x \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi(y+a)\xi} dy \\ &= e^{-2i\pi a \xi} \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-2i\pi a \xi} \widehat{f}(\xi).}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} \widehat{M_b f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi b x} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x(\xi-b)} dx \\ &= \widehat{f}(\xi - b). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\widehat{M_b f}(\xi) = \widehat{f}(\xi - b).}$$

(d) En notant $\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |h(x)| dx$, l'intégrale absolue double associée vaut

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| |g(x-y)| dy dx &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| dx \right) dy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Fubini s'applique donc. Alors

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) e^{-2i\pi x \xi} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-2i\pi x \xi} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Dans l'intégrale intérieure, posons $z = x - y$:

$$\int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2i\pi(z+y)\xi} dz = e^{-2i\pi y\xi} \widehat{g}(\xi).$$

Il vient

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).$$

(e) Comme $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \\ &= \left[f(x) e^{-2i\pi x\xi} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \\ &= 2i\pi\xi \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\widehat{f}'(\xi) = 2i\pi\xi \widehat{f}(\xi).$$

D'autre part, $xf(x)$ est absolument intégrable. On peut donc dériver sous le signe intégral :

$$\begin{aligned} (\widehat{f})'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) (-2i\pi x) e^{-2i\pi x\xi} dx \\ &= -2i\pi \widehat{xf}(\xi). \end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{xf}(\xi) = -\frac{1}{2i\pi} (\widehat{f})'(\xi).$$

14

(a) Comme u est à support compact, il existe $A > 0$ tel que $u(t) = 0$ lorsque $|t| > A$. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ et, par exemple, le voisinage

$$V = [x_0 - 1, x_0 + 1].$$

Si $x \in V$ et si $u(x + mL) \neq 0$, alors

$$|x + mL| \leq A,$$

donc

$$|m|L \leq A + |x| \leq A + |x_0| + 1.$$

Ainsi seuls un nombre fini d'entiers m , indépendants de $x \in V$, peuvent contribuer. La somme est donc localement finie. Elle définit bien $P_L u$ et, au voisinage de chaque point, $P_L u$ est une somme finie de fonctions continues ; elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$\begin{aligned}
 P_L u(x + L) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(x + (m + 1)L) \\
 &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} u(x + rL) = P_L u(x),
 \end{aligned}$$

après le changement d'indice $r = m + 1$. Ainsi $P_L u$ est L -périodique.

(b) La somme étant localement finie, on peut écrire

$$c_k^{(L)}(P_L u) = \frac{1}{L} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^L u(x + mL) e^{-2i\pi kx/L} dx.$$

Dans le terme d'indice m , posons $t = x + mL$. Alors

$$x = t - mL$$

et

$$e^{-2i\pi kx/L} = e^{-2i\pi kt/L} e^{2i\pi km} = e^{-2i\pi kt/L}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 c_k^{(L)}(P_L u) &= \frac{1}{L} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{mL}^{(m+1)L} u(t) e^{-2i\pi kt/L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-2i\pi t(k/L)} dt.
 \end{aligned}$$

Donc

$$c_k^{(L)}(P_L u) = \frac{1}{L} \widehat{u}\left(\frac{k}{L}\right).$$

(c) Deux fréquences consécutives sont séparées de

$$\frac{k+1}{L} - \frac{k}{L} = \frac{1}{L}.$$

Lorsque L augmente, ce pas tend vers 0. Le réseau de fréquences $(1/L)\mathbb{Z}$ devient donc de plus en plus fin dans $\mathbb{R}$.

(d) L'identité de (b) est exacte pour chaque $L > 0$ et chaque entier k . Elle montre que les coefficients de Fourier de la périodisation sont des valeurs échantillonnées de la transformée de Fourier de u , prises aux fréquences k/L .

En revanche, faire tendre L vers l'infini dans une formule de série de Fourier soulève d'autres questions : convergence des séries, comportement de la périodisation, contrôle des erreurs et passage éventuel d'une somme à une intégrale. Aucune de ces étapes n'est fournie automatiquement par l'identité de (b). Celle-ci établit un lien rigoureux sans prétendre constituer à elle seule un théorème de limite.

IV Conserver l'énergie

15

(a) Pour $\xi \neq 0$, comme f et f' tendent vers 0 à l'infini, une première intégration par parties donne

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2i\pi\xi} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Une seconde intégration par parties donne alors

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2i\pi\xi)^2} \int_{\mathbb{R}} f''(x) e^{-2i\pi x\xi} dx,$$

d'où

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2i\pi\xi)^2} \widehat{f''}(\xi).$$

Comme f'' est absolument intégrable,

$$|\widehat{f''}(\xi)| \leq \|f''\|_1.$$

Pour $|\xi| \geq 1$,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f''\|_1}{4\pi^2\xi^2}.$$

Pour tout ξ ,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1.$$

La fonction $\widehat{f}$ est donc bornée près de 0 et dominée par une constante multiple de $1/\xi^2$ à l'infini. Par conséquent,

$$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

(b) On applique le même raisonnement à f' . Comme f''' est absolument intégrable,

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{(2i\pi\xi)^2} \widehat{f'''}(\xi)$$

pour $\xi \neq 0$. Ainsi $\widehat{f'}$ est bornée près de 0 et décroît au moins comme $1/\xi^2$ à l'infini. Donc

$$\widehat{f'} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

(c) Pour $0 \leq j \leq 3$,

$$\widetilde{f}^{(j)}(x) = (-1)^j \overline{f^{(j)}(-x)}.$$

Ainsi

$$|\widetilde{f}^{(j)}(x)| = |f^{(j)}(-x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^2},$$

et $\widetilde{f} \in \mathcal{A}$.

Par définition,

$$\widehat{\widetilde{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)} e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Posons $y = -x$. Alors

$$\begin{aligned} \widehat{\widetilde{f}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(y)} e^{2i\pi y\xi} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi y\xi} dy. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\widehat{\widetilde{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}}.$$

(d) Posons $h = f * \widetilde{f}$. Au point 0,

$$\begin{aligned} h(0) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \widetilde{f}(-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{f(y)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{h(0) = \|f\|_2^2}.$$

D'après le théorème de convolution de la question 13(d) et la question (c),

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{\widetilde{f}}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Ainsi

$$\boxed{\widehat{h} = |\widehat{f}|^2}.$$

Il reste à vérifier les hypothèses du lemme d'inversion. Le produit $|\widehat{f}|^2$ est intégrable puisque $\widehat{f} \in L^2$. La convolution h est intégrable, car

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|\widetilde{f}\|_1 = \|f\|_1^2.$$

Elle est continue : si $x_m \rightarrow x$, alors $\widetilde{f}(x_m - y) \rightarrow \widetilde{f}(x - y)$ pour chaque y , et l'intégrande est dominé par

$$2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\widetilde{f}(t)| |f(y)|,$$

qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée permet donc de passer à la limite.

Le lemme d'inversion appliqué à h en 0 donne

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\xi) d\xi.$$

En remplaçant les deux membres,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

(e) Il n'est pas nécessaire de supposer que $f' \in \mathcal{A}$. D'après 13(a), f' est continue et appartient à $L^1 \cap L^2$; d'après 15(b), $\widehat{f'} \in L^1 \cap L^2$.

On pose

$$q(x) = \overline{f'(-x)}.$$

Les mêmes changements de variable qu'en (c) donnent $\widehat{q} = \overline{\widehat{f'}}$. La convolution $r = f' * q$ est continue et intégrable, et

$$r(0) = \|f'\|_2^2, \quad \widehat{r} = |\widehat{f'}|^2 \in L^1.$$

Le lemme d'inversion appliqué à r en 0 donne donc

$$\|f'\|_2^2 = \|\widehat{f'}\|_2^2.$$

Les deux membres étant positifs ou nuls,

$$\|f'\|_2 = \|\widehat{f'}\|_2.$$

Or la question 13(e) fournit

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi\widehat{f}(\xi).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|f'\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2\xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 4\pi^2 \|\xi\widehat{f}\|_2^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\|f'\|_2 = 2\pi \|\xi\widehat{f}\|_2.$$

Synthèse. L'identité de Plancherel n'a pas été supposée dans sa forme générale sur $L^2(\mathbb{R})$. Elle a été reconstruite ici, dans une classe suffisamment régulière, à partir de l'inversion et du fait que la convolution devient une multiplication.

V Un second visage du principe d'incertitude

16

(a) La définition de $\mathcal{A}$ donne

$$|x| |f(x)|^2 \leq C^2 \frac{|x|}{(1+x^2)^4},$$

qui tend vers 0 lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. Ainsi

$$x|f(x)|^2 \longrightarrow 0.$$

La dérivée de $x|f(x)|^2$ vaut

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x|f(x)|^2) &= |f(x)|^2 + x \frac{d}{dx}(f(x)\overline{f(x)}) \\ &= |f(x)|^2 + x(f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)}) \\ &= |f(x)|^2 + 2\operatorname{Re}(xf'(x)\overline{f(x)}).\end{aligned}$$

Intégrons sur $[-R, R]$ puis faisons tendre R vers $+\infty$. Le terme de bord tend vers 0 et les intégrales convergent absolument. On obtient

$$0 = \|f\|_2^2 + 2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} xf'(x)\overline{f(x)} dx.$$

Donc

$$\|f\|_2^2 = -2\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} xf'(x)\overline{f(x)} dx.$$

(b) On en déduit

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &\leq 2 \left| \int_{\mathbb{R}} xf'(x)\overline{f(x)} dx \right| \\ &\leq 2\|xf\|_2\|f'\|_2\end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz. La question 15(e) donne

$$\|f'\|_2 = 2\pi\|\xi\widehat{f}\|_2.$$

Ainsi

$$\|f\|_2^2 \leq 4\pi\|xf\|_2\|\xi\widehat{f}\|_2,$$

soit

$$\|xf\|_2\|\xi\widehat{f}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}\|f\|_2^2.$$

En élevant au carré,

$$\|xf\|_2^2\|\xi\widehat{f}\|_2^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}\|f\|_2^4.$$

En revenant aux intégrales,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2.$$

(c) Posons

$$u(x) = xf(x), \quad v(x) = f'(x).$$

Comme $f \neq 0$, le vecteur u de L^2 ne peut pas être nul : si $xf(x) = 0$ presque partout, la continuité de f imposerait $f = 0$.

L'égalité finale exige d'abord l'égalité dans Cauchy-Schwarz. Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que

$$v = \lambda u$$

presque partout, soit

$$f'(x) = \lambda x f(x)$$

presque partout. Les deux membres étant continus, cette identité vaut en tout point.

Il faut également que la première inégalité de (b), qui remplace une partie réelle par un module, soit une égalité. Autrement dit, l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} x f'(x) \overline{f(x)} dx$$

doit être réelle et négative. Or, ici,

$$\int_{\mathbb{R}} x f'(x) \overline{f(x)} dx = \lambda \|xf\|_2^2.$$

La constante λ doit donc être réelle et strictement négative. Écrivons

$$\lambda = -\alpha, \quad \alpha > 0.$$

On obtient

$$\boxed{f'(x) = -\alpha x f(x).}$$

L'équation différentielle se résout sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx} \left(e^{\alpha x^2/2} f(x) \right) = 0.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$\boxed{f(x) = C e^{-\alpha x^2/2}.}$$

Comme $f \neq 0$, $C \neq 0$. Réciproquement, pour toute $\alpha > 0$ et tout $C \neq 0$, cette fonction appartient à $\mathcal{A}$ et vérifie $f' = -\alpha x f$; toutes les inégalités utilisées deviennent des égalités. Les gaussiennes centrées sont donc exactement les cas d'égalité.

17 —

(a) Les dérivées de

$$g(x) = e^{-2i\pi bx} f(x+a)$$

jusqu'à l'ordre 3 sont des combinaisons linéaires des fonctions

$$e^{-2i\pi bx} f^{(j)}(x+a), \quad 0 \leq j \leq 3.$$

Pour a fixé, le rapport

$$\frac{(1+x^2)^2}{(1+(x+a)^2)^2}$$

est continu et tend vers 1 lorsque $|x| \rightarrow +\infty$; il est donc borné sur $\mathbb{R}$. Les estimations définissant $\mathcal{A}$ restent ainsi vraies, avec une constante éventuellement plus grande. Donc

$$g \in \mathcal{A}.$$

Comme $|e^{-2i\pi bx}| = 1$,

$$\|xg\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x+a)|^2 dx.$$

Avec $y = x + a$,

$$\|xg\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} (y-a)^2 |f(y)|^2 dy = \|(x-a)f\|_2^2.$$

Donc

$$\|xg\|_2 = \|(x-a)f\|_2.$$

On peut écrire

$$g = M_{-b}(\tau_{-a}f).$$

Les questions 13(b) et 13(c) donnent

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \widehat{\tau_{-a}f}(\xi+b) \\ &= e^{2i\pi a(\xi+b)} \widehat{f}(\xi+b). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\widehat{g}(\xi) = e^{2i\pi a(\xi+b)} \widehat{f}(\xi+b).$$

Le facteur exponentiel est de module 1. Par le changement de variable $\eta = \xi + b$,

$$\begin{aligned} \|\xi\widehat{g}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi+b)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\eta-b)^2 |\widehat{f}(\eta)|^2 d\eta. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\xi\widehat{g}\|_2 = \|(\xi-b)\widehat{f}\|_2.$$

(b) Appliquons la question 16 à g :

$$\|xg\|_2 \|\xi\widehat{g}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|g\|_2^2.$$

La translation et la modulation conservent la norme L^2 , donc $\|g\|_2 = \|f\|_2$. Avec les identités de (a),

$$\|(x-a)f\|_2 \|(\xi-b)\widehat{f}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2.$$

(c) Il y a égalité pour f si et seulement s'il y a égalité pour g . D'après la question 16(c), cela équivaut à l'existence de $C \neq 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$g(x) = Ce^{-\alpha x^2/2}.$$

Comme

$$e^{-2i\pi bx} f(x+a) = C e^{-\alpha x^2/2},$$

on obtient, avec $y = x + a$,

$$f(y) = C e^{2i\pi b(y-a)} e^{-\alpha(y-a)^2/2}.$$

En absorbant le facteur constant $e^{-2i\pi ab}$ dans C , les cas d'égalité sont exactement

$$f(x) = C e^{2i\pi bx} e^{-\alpha(x-a)^2/2}, \quad C \in \mathbb{C}^*, \quad \alpha > 0.$$

Ce sont les translations et modulations des gaussiennes centrées.

VI Une même idée de Fourier

18

(a) Le tableau complété est

groupe	groupe des fréquences	forme de Fourier
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	somme finie
$\mathbb{T}$	$\widehat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}$	série
$\mathbb{R}$	$\widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}$	intégrale

(b) Dans les trois cadres, si χ est un caractère et si

$$(\tau_a \chi)(x) = \chi(x - a),$$

alors

$$\tau_a \chi(x) = \chi(x) \chi(-a) = \overline{\chi(a)} \chi(x).$$

La formule commune est donc

$$\tau_a \chi = \overline{\chi(a)} \chi.$$

Elle exprime que les caractères transforment chaque translation en multiplication par un scalaire.

Dans les trois cadres, c'est la convolution qui devient une multiplication point par point dans l'espace des fréquences :

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g},$$

avec la normalisation de convolution propre au groupe considéré.

(c) Les coefficients de Fourier sont indexés par les caractères continus du groupe. Les questions 2, 9 et 12 ont identifié respectivement

$$\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \widehat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}, \quad \widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}.$$

Le premier ensemble de fréquences est fini : on obtient donc une famille finie de coefficients. Le deuxième est infini discret : on obtient une suite $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$. Le troisième est continu : on obtient une fonction $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ définie sur $\mathbb{R}$.

- (d) La question 11(b) a établi, pour une fonction continue 2π -périodique f et pour chaque entier k fixé,

$$\widehat{f_n}([k]_n) \longrightarrow c_k(f)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le paramètre qui varie est n ; la fréquence entière k reste fixée. Il s'agit d'une limite obtenue par sommes de Riemann. Cette convergence coefficient par coefficient ne fournit à elle seule ni convergence uniforme sur toutes les fréquences, ni convergence d'opérateurs, ni convergence des reconstructions complètes.

La question 14(b) a établi, pour toute fonction continue à support compact u , tout $L > 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, l'identité exacte

$$c_k^{(L)}(P_L u) = \frac{1}{L} \widehat{u}\left(\frac{k}{L}\right).$$

Ici, pour un L donné, les coefficients de la périodisation sont exactement les valeurs de $\widehat{u}$ sur le réseau $(1/L)\mathbb{Z}$, à un facteur $1/L$ près. Ce n'est pas une limite. Le fait que le pas $1/L$ tende vers 0 lorsque $L \rightarrow +\infty$ ne suffit pas, sans estimations supplémentaires, à transformer une série de Fourier en une intégrale de Fourier par passage à la limite.

Ces deux relations sont donc des ponts analytiques rigoureux ; elles doivent être distinguées de l'analogie structurelle plus générale entre les trois théories.

- (e) Dans le cas fini,

$$|\operatorname{supp} f| |\operatorname{supp} \widehat{f}| \geq n$$

mesure la localisation par les cardinalités des supports : nombre de points où f est non nulle dans l'espace direct et nombre de fréquences où $\widehat{f}$ est non nulle.

Sur $\mathbb{R}$,

$$\|xf\|_2 \|\xi\widehat{f}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2$$

mesure une dispersion quadratique autour de l'origine ; la question 17 remplace plus généralement x et ξ par $x - a$ et $\xi - b$ pour mesurer la dispersion autour de centres choisis.

Les quantités utilisées sont donc différentes et l'une des inégalités n'a pas été obtenue comme limite de l'autre. Leur idée commune est néanmoins la même : une fonction non nulle ne peut pas être arbitrairement concentrée simultanément dans l'espace direct et dans l'espace des fréquences déterminé par les caractères.

Ouverture. Les caractères utilisés ici sont les représentations complexes de dimension 1. Pour un groupe non abélien, les représentations irréductibles de dimension supérieure prennent leur place ; la transformée de Fourier associe alors à une fonction des coefficients matriciels plutôt que de simples nombres complexes.