

DM n°08 — Du fini au continu : Fourier et principes d'incertitude

Groupes et caractères · Séries de Fourier · Transformée de Fourier · Convolution · Plancherel · Principes d'incertitude

Une fonction peut vivre sur un cycle de n positions, sur une variable périodique, ou sur toute la droite réelle. Dans les trois cas, une opération très simple revient sans cesse : traduire l'argument. Quelles fonctions réagissent de la manière la plus simple possible à ces translations ? En répondant successivement à cette question sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sur le cercle puis sur $\mathbb{R}$, on fera apparaître trois formes de l'analyse de Fourier et deux manifestations d'un même conflit entre localisation et fréquences.

I Le premier laboratoire : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On fixe un entier $n \geq 2$ et on note

$$G_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}.$$

Pour alléger les écritures, les éléments de G_n seront représentés par des entiers, tous les indices étant compris modulo n . On note $\mathcal{F}_n$ l'espace vectoriel complexe des fonctions de G_n dans $\mathbb{C}$ et, pour $a \in G_n$,

$$(\tau_a f)(x) = f(x - a).$$

On munit $\mathcal{F}_n$ du produit hermitien

$$\langle f, g \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{x \in G_n} f(x) \overline{g(x)},$$

et de la norme associée $\|f\|_n = \sqrt{\langle f, f \rangle_n}$.

- 1 (a) Vérifier que $\tau_0 = \text{Id}$ et que

$$\tau_a \tau_b = \tau_{a+b}$$

pour tous $a, b \in G_n$.

- (b) Montrer que chaque translation conserve la norme :

$$\|\tau_a f\|_n = \|f\|_n.$$

- 2 Soit $f \in \mathcal{F}_n$ non nulle. On suppose que, pour tout $a \in G_n$, il existe un nombre complexe $\lambda(a)$ tel que

$$\tau_a f = \lambda(a) f.$$

- (a) Montrer que $|\lambda(a)| = 1$ pour tout a , puis que

$$\lambda(a + b) = \lambda(a) \lambda(b).$$

- (b) On pose

$$\omega = e^{2i\pi/n}.$$

Montrer qu'il existe un unique $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que

$$\lambda(a) = \omega^{-ka}$$

pour tout $a \in G_n$.

(c) Montrer que $f(0) \neq 0$, puis en déduire que f est proportionnelle à la fonction

$$\chi_k(x) = \omega^{kx}.$$

Vérifier que χ_k est bien définie sur G_n , puis vérifier directement que

$$\tau_a \chi_k = \omega^{-ka} \chi_k.$$

Éclairage. Les fonctions χ_k sont les caractères de G_n : ce sont les morphismes de groupes de G_n vers le cercle unité. Elles sont exactement les fonctions non nulles qui transforment toutes les translations en multiplications scalaires.

3 (a) Pour $m \in \mathbb{Z}$, calculer

$$\sum_{x=0}^{n-1} \omega^{mx}$$

en distinguant les cas où n divise m ou non.

(b) En déduire que, pour $k, \ell \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\langle \chi_k, \chi_\ell \rangle_n = \begin{cases} 1, & k = \ell, \\ 0, & k \neq \ell. \end{cases}$$

Pourquoi $(\chi_0, \dots, \chi_{n-1})$ est-elle alors une base orthonormée de $\mathcal{F}_n$?

(c) Pour $f \in \mathcal{F}_n$, on définit

$$\widehat{f}(k) = \langle f, \chi_k \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{x \in G_n} f(x) \omega^{-kx}.$$

Établir la formule d'inversion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \omega^{kx}$$

et l'identité de Parseval

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{x \in G_n} |f(x)|^2.$$

4 (a) Déterminer $\widehat{\tau_a f}(k)$ en fonction de $\widehat{f}(k)$.

(b) Pour $f, g \in \mathcal{F}_n$, on définit la convolution cyclique normalisée par

$$(f *_n g)(x) = \frac{1}{n} \sum_{y \in G_n} f(y)g(x-y).$$

Montrer que

$$\widehat{f *_n g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).$$

(c) Comparer les résultats de (a) et (b) avec la propriété de la question 2(c). En quoi les caractères simplifient-ils simultanément les translations et la convolution ?

5 Pour $f \in \mathcal{F}_n$, on note

$$\text{supp } f = \{x \in G_n ; f(x) \neq 0\}.$$

Soit $f \neq 0$, et posons

$$s = |\text{supp } f|, \quad t = |\text{supp } \widehat{f}|.$$

(a) Montrer, pour tout k , que

$$|\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{s}{n} \|f\|_n^2.$$

En utilisant Parseval, en déduire

$$st \geq n.$$

(b) Vérifier que l'égalité est atteinte pour la fonction δ_0 définie par $\delta_0(0) = 1$ et $\delta_0(x) = 0$ si $x \neq 0$, puis pour une fonction constante non nulle.

(c) Formuler avec vos mots ce que cette inégalité interdit à une fonction non nulle.

Une courte ouverture au-delà du groupe cyclique

6 Soit désormais G un groupe abélien fini. Un **caractère** de G est un morphisme $\chi : G \rightarrow \mathbb{U}$. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G . On admet que $\widehat{G}$ possède $|G|$ éléments et que ses caractères forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^G$ pour

$$\langle f, g \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}.$$

(a) Montrer que, pour tout $a \in G$,

$$\tau_a \chi = \overline{\chi(a)} \chi.$$

(b) En posant

$$\widehat{f}(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi(x)},$$

écrire les analogues de la formule d'inversion et de Parseval.

(c) Avec la convolution normalisée

$$(f *_G g)(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(y)g(x-y),$$

montrer que $\widehat{f *_G g}(\chi) = \widehat{f}(\chi)\widehat{g}(\chi)$, puis expliquer pourquoi l'argument de la question 5 donne encore

$$|\operatorname{supp} f| |\operatorname{supp} \widehat{f}| \geq |G|.$$

Synthèse. Sur un groupe abélien fini, les fréquences ne sont pas choisies arbitrairement : ce sont les caractères, c'est-à-dire les fonctions qui rendent les translations scalaires. Fourier consiste alors à prendre les coordonnées d'une fonction dans cette base adaptée aux translations.

II Quand le groupe devient continu et compact : le cercle

On note

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

La loi de groupe est l'addition des classes modulo 2π .

7 Montrer que l'application

$$\Phi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{U}, \quad [x] \longmapsto e^{ix},$$

est un isomorphisme de groupes.

8 On commence par établir un lemme qui servira à identifier les fréquences du cercle et de la droite. Les intégrales de fonctions complexes sont prises composante par composante, c'est-à-dire que, si $h = u + iv$ avec u et v à valeurs réelles et intégrables sur $[a, b]$, on pose

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Pour $b < a$, on conserve la convention $\int_a^b h = -\int_b^a h$. Soit

$$\psi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow \mathbb{U}$$

un morphisme de groupes continu.

(a) Vérifier que $\psi(0) = 1$. On pose

$$F(x) = \int_0^x \psi(t) dt.$$

Montrer qu'il existe $a \neq 0$ tel que $F(a) \neq 0$.

(b) Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x+a) - F(x) = \psi(x)F(a).$$

En déduire que ψ est dérivable.

(c) En dérivant l'identité $\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y)$ par rapport à y en $y = 0$, montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que

$$\psi'(x) = c\psi(x).$$

Utiliser $|\psi(x)| = 1$ pour montrer que $c = i\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Résoudre l'équation différentielle obtenue et conclure que

$$\psi(x) = e^{i\alpha x}$$

pour un unique réel α .

9 Soit $\chi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{U}$ un caractère continu et soit $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ la projection canonique.

(a) Appliquer la question 8 à $\chi \circ \pi$.

(b) Exploiter la 2π -périodicité de $\chi \circ \pi$ pour montrer que les caractères continus de $\mathbb{T}$ sont exactement

$$\chi_k([x]) = e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En quel sens peut-on écrire

$$\widehat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z} ?$$

10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π -périodique. On pose

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(a) Pour

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

montrer que la famille $(x \mapsto e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée.

On pourra utiliser sans démonstration, pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π -périodique, la reconstruction par sa série de Fourier et l'identité de Parseval.

(b) Écrire ces deux relations avec la normalisation précédente. Comparer leur forme avec les relations de la question 3(c).

(c) Pour

$$(\tau_a f)(x) = f(x - a),$$

calculer $c_k(\tau_a f)$.

(d) Pour deux fonctions continues 2π -périodiques, on définit

$$(f *_{\mathbb{T}} g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x - y) dy.$$

Montrer que

$$c_k(f *_{\mathbb{T}} g) = c_k(f) c_k(g).$$

11 Soit maintenant f une fonction continue et 2π -périodique. Pour tout $n \geq 2$, on veut échantillonner f sur G_n en posant, pour une classe $[j]_n \in G_n$,

$$f_n([j]_n) = f\left(\frac{2\pi j}{n}\right).$$

Vérifier que cette définition ne dépend pas du représentant entier j choisi. Fixons ensuite $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que

$$\widehat{f_n}([k]_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{-2i\pi k j/n}.$$

(b) Interpréter cette expression comme une somme de Riemann et établir

$$\widehat{f_n}([k]_n) \longrightarrow c_k(f)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(c) Expliquer précisément ce qui vient d'être démontré. Pourquoi ce résultat ne suffit-il pas, à lui seul, à affirmer qu'une transformée de Fourier discrète « converge vers » une série de Fourier dans tous les sens possibles ?

Éclairage. Ici, le passage du fini au cercle repose sur une vraie convergence de sommes de Riemann, mais seulement pour chaque fréquence entière fixée. L'analogie entre les deux théories est plus large que cette seule procédure limite.

III Quand la compacité disparaît : la droite réelle

12 (a) Utiliser la question 8 pour montrer que les caractères continus de $(\mathbb{R}, +)$ sont exactement

$$\chi_\xi(x) = e^{2i\pi\xi x}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Justifier l'écriture

$$\widehat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}.$$

(b) Pour une fonction continue f telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty$, on définit

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx.$$

Expliquer en quoi cette définition reprend exactement la même idée que les coefficients de Fourier des parties I et II.

Pour la suite, on note

$$\|h\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

lorsque cette intégrale est finie, et on considère la classe $\mathcal{A}$ des fonctions $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$|f^{(j)}(x)| \leq \frac{C}{(1+x^2)^2}.$$

13 Soient $f, g \in \mathcal{A}$.

(a) Justifier que f, f', f'', f''' sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$, que f, f' sont de carré intégrable, et que $x \mapsto xf(x)$ est à la fois absolument intégrable et de carré intégrable.

- (b) Pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-2i\pi a\xi} \widehat{f}(\xi).$$

- (c) Pour $b \in \mathbb{R}$, on pose

$$(M_b f)(x) = e^{2i\pi bx} f(x).$$

Montrer que

$$\widehat{M_b f}(\xi) = \widehat{f}(\xi - b).$$

- (d) On définit

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy.$$

Justifier l'usage du théorème de Fubini et montrer que

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}.$$

- (e) À l'aide d'une intégration par parties puis d'une dérivation sous le signe intégral, établir

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\xi \widehat{f}(\xi)$$

et

$$\widehat{xf}(\xi) = -\frac{1}{2i\pi} (\widehat{f})'(\xi).$$

- 14 Le passage du cercle à la droite possède lui aussi une relation exacte. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue à support compact et soit $L > 0$. On définit sa périodisation par

$$P_L u(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u(x + mL).$$

- (a) Montrer que la somme définissant $P_L u$ est localement finie : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage de x_0 sur lequel seuls un nombre fini d'indices m peuvent donner un terme non nul. En déduire que $P_L u$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, puis montrer qu'elle est L -périodique.

- (b) Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit le coefficient de Fourier de période L par

$$c_k^{(L)}(P_L u) = \frac{1}{L} \int_0^L P_L u(x) e^{-2i\pi kx/L} dx.$$

Montrer que

$$c_k^{(L)}(P_L u) = \frac{1}{L} \widehat{u}\left(\frac{k}{L}\right).$$

- (c) Quelle est la distance entre deux fréquences consécutives k/L et $(k+1)/L$? Comment évolue-t-elle lorsque L augmente ?

(d) Expliquer pourquoi l'identité de (b) constitue un lien rigoureux entre Fourier périodique et Fourier sur $\mathbb{R}$, sans être à elle seule une démonstration d'un théorème de passage à la limite lorsque $L \rightarrow +\infty$.

IV Conserver l'énergie

15 Soit $f \in \mathcal{A}$.

(a) Pour $\xi \neq 0$, effectuer deux intégrations par parties et montrer que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2i\pi\xi)^2} \widehat{f''}(\xi).$$

En déduire que $\widehat{f}$ est absolument intégrable et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer de même que $\widehat{f'}$ est absolument intégrable et de carré intégrable.

On admet désormais le lemme d'inversion suivant : si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, si h et $\widehat{h}$ sont absolument intégrables, alors

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi.$$

(c) On pose

$$\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}.$$

Montrer que $\widetilde{f} \in \mathcal{A}$, puis établir

$$\widehat{\widetilde{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

(d) En considérant $h = f * \widetilde{f}$, montrer que

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$$

et

$$\widehat{h}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Appliquer le lemme d'inversion à h en 0 pour établir

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

(e) Sans supposer que $f' \in \mathcal{A}$, reprendre l'argument de (d) avec f' en utilisant les intégrabilités établies en 13(a) et 15(b). Puis utiliser la question 13(e) pour obtenir

$$\|f'\|_2 = 2\pi \|\xi \widehat{f}\|_2.$$

Synthèse. Avec la normalisation choisie, Parseval sur le groupe fini, Parseval sur le cercle et l'identité précédente ont la même fonction : la décomposition de Fourier conserve l'énergie quadratique, même si l'ensemble des fréquences est successivement fini, discret infini, puis continu.

V Un second visage du principe d'incertitude

16 Soit $f \in \mathcal{A}$ non nulle.

(a) Montrer que

$$x|f(x)|^2 \longrightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, puis établir par intégration par parties

$$\|f\|_2^2 = -2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} x f'(x) \overline{f(x)} dx.$$

(b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis la question 15(e), démontrer

$$\|xf\|_2 \|\widehat{\xi f}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2.$$

En déduire la forme intégrale

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^2.$$

(c) Supposons qu'il y ait égalité. Étudier successivement les conditions d'égalité utilisées en (b) et montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f'(x) = -\alpha x f(x).$$

Déterminer alors toutes les fonctions non nulles pour lesquelles l'égalité est atteinte.

17 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{A}$, on pose

$$g(x) = e^{-2i\pi bx} f(x+a).$$

(a) Vérifier que $g \in \mathcal{A}$ et montrer que

$$\|xg\|_2 = \|(x-a)f\|_2.$$

Calculer $\widehat{g}$ puis établir

$$\|\xi \widehat{g}\|_2 = \|(\xi-b)\widehat{f}\|_2.$$

(b) Dédurre de la question 16 l'inégalité centrée

$$\|(x-a)f\|_2 \|(\xi-b)\widehat{f}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2.$$

(c) Déterminer les cas d'égalité. On fera apparaître les translations et modulations de gaussiennes.

VI Une même idée de Fourier

- 18 (a) Recopier et compléter le tableau suivant. Dans la deuxième colonne, identifier explicitement le groupe des caractères continus obtenu dans le problème ; dans la troisième, indiquer si la reconstruction de Fourier prend la forme d'une somme finie, d'une série ou d'une intégrale.

groupe	groupe des fréquences	forme de Fourier
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	?	?
$\mathbb{T}$	?	?
$\mathbb{R}$	?	?

- (b) Dans chacun des trois cadres, écrire la relation décrivant l'action d'une translation τ_a sur un caractère χ . Dégager une formule commune. Indiquer ensuite quelle opération, définie dans les trois cadres, la transformée de Fourier convertit en multiplication point par point.
- (c) En utilisant les identifications des groupes de fréquences obtenues aux questions 2, 9 et 12, expliquer pourquoi la transformée de Fourier d'une fonction est respectivement une famille finie de coefficients, une suite indexée par $\mathbb{Z}$, puis une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- (d) Énoncer précisément les deux relations analytiques établies aux questions 11(b) et 14(b). Pour chacune, préciser les objets comparés, le paramètre qui varie ou reste fixé, et s'il s'agit d'une limite ou d'une identité exacte. Expliquer enfin ce que chacune de ces deux relations ne permet pas, à elle seule, de conclure sur un passage à la limite entre théories de Fourier.
- (e) Pour chacun des principes d'incertitude des questions 5 et 16, préciser les deux quantités qui mesurent la localisation dans l'espace direct et dans l'espace des fréquences. Formuler ensuite l'idée commune exprimée par les deux inégalités, sans affirmer que l'une s'obtient comme limite de l'autre.

Ouverture. Un caractère est exactement une représentation complexe de dimension 1 du groupe considéré. Lorsque le groupe cesse d'être abélien, les représentations irréductibles peuvent avoir dimension supérieure à 1 : les « coefficients de Fourier » deviennent alors naturellement matriciels.