

CORRIGÉ

Agrégation interne · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°03 — Méthode de Newton : convergence locale et contre-exemples

Méthode de Newton · Suites et convergence · Dérivation et convexité · Estimation de l'erreur · Ordre de convergence · Contre-exemples

I Une itération issue d'une tangente

1

Construction géométrique

Pour $f(x) = x^2 - 2$, on a $f'(x) = 2x$. La tangente en $u > 0$ a pour équation

$$y = f(u) + f'(u)(x - u) = u^2 - 2 + 2u(x - u).$$

Ainsi

$$y = 2ux - u^2 - 2.$$

Elle coupe l'axe des abscisses lorsque

$$2ux - u^2 - 2 = 0,$$

donc à l'abscisse

$$T(u) = \frac{u^2 + 2}{2u} = \frac{1}{2} \left(u + \frac{2}{u} \right).$$

La relation de récurrence est donc

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Sur le croquis, x_{n+1} est l'abscisse où la tangente en $(x_n, f(x_n))$ coupe l'axe horizontal. Une nouvelle tangente est ensuite tracée au point de la courbe d'abscisse x_{n+1} . La suite traduit exactement cette construction géométrique.

Point de méthode. La formule n'est pas un procédé algébrique tombé du ciel : elle est la traduction de la linéarisation de f au voisinage du point courant.

2

Observation numérique

On obtient

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2},$$

puis

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{17}{12}.$$

Enfin

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right) = \frac{577}{408} \simeq 1,41421568627.$$

Avec $\sqrt{2} \simeq 1,41421356237$, les erreurs sont approximativement

n	$ x_n - \sqrt{2} $
0	$5,86 \times 10^{-1}$
1	$8,58 \times 10^{-2}$
2	$2,45 \times 10^{-3}$
3	$2,12 \times 10^{-6}$

Ces valeurs suggèrent à la fois la convergence vers $\sqrt{2}$ et une accélération spectaculaire de l'erreur. Une conjecture raisonnable est que l'erreur suivante se comporte comme une constante multipliée par le carré de l'erreur précédente.

À ce stade, rien n'est démontré : quatre valeurs numériques ne prouvent ni la convergence de toute la suite, ni une loi asymptotique.

3

Convergence dans l'exemple

Pour $x > 0$,

$$T(x) - \sqrt{2} = \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x}{2x} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}.$$

De même,

$$T(x) - x = \frac{x^2 + 2 - 2x^2}{2x} = \frac{2 - x^2}{2x}.$$

Si $x > \sqrt{2}$, alors

$$T(x) - \sqrt{2} \geq 0$$

et

$$T(x) - x < 0.$$

Ainsi

$$\sqrt{2} \leq T(x) < x.$$

Comme $x_0 = 2 > \sqrt{2}$, une récurrence montre que

$$\sqrt{2} \leq x_{n+1} < x_n$$

tant que $x_n > \sqrt{2}$. Si un terme vaut $\sqrt{2}$, la suite devient constante ; sinon elle est strictement décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Elle converge donc vers une limite $\ell \geq \sqrt{2}$.

La relation de récurrence et la positivité de ℓ donnent, par passage à la limite,

$$\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right),$$

d'où

$$\ell^2 = 2.$$

Comme $\ell > 0$,

$$\boxed{\ell = \sqrt{2}.}$$

4 _____

Première estimation quadratique

Avec

$$e_n = x_n - \sqrt{2} \geq 0,$$

l'identité précédente donne

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2x_n}.$$

Or $x_n \geq \sqrt{2}$, donc

$$0 \leq e_{n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} e_n^2.$$

On peut prendre

$$\boxed{C = \frac{1}{2\sqrt{2}}.}$$

Cette relation est d'une nature entièrement différente d'une simple observation décimale : elle vaut pour tout n , et elle montre que, dès que l'erreur est petite, son carré est beaucoup plus petit encore. La rapidité observée à la question 2 est donc expliquée par une identité exacte.

II De la construction géométrique à un premier théorème global

5 _____

Définition générale

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse u , avec $f'(u) \neq 0$, a pour équation

$$y = f(u) + f'(u)(x - u).$$

Son intersection avec l'axe des abscisses vérifie

$$0 = f(u) + f'(u)(x - u),$$

donc

$$x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}.$$

Le domaine de définition de la transformation de Newton est

$$D = \{u : f'(u) \neq 0\}.$$

Pour $u \in D$, on pose

$$N_f(u) = u - \frac{f(u)}{f'(u)}.$$

Pour $u \in D$,

$$N_f(u) = u \iff \frac{f(u)}{f'(u)} = 0 \iff f(u) = 0.$$

Les points fixes de N_f sont donc exactement les zéros de f situés dans ce domaine.

6

Un critère global sur un intervalle convexe

Soit $x \in (\alpha, b]$. Comme $f' > 0$ sur $[\alpha, b]$, la fonction f est strictement croissante. Puisque $f(\alpha) = 0$,

$$f(x) > 0.$$

Il en résulte immédiatement

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x.$$

La convexité fournit l'autre inégalité. La courbe est au-dessus de sa tangente en x , donc

$$f(\alpha) \geq f(x) + f'(x)(\alpha - x).$$

Comme $f(\alpha) = 0$,

$$f(x) \leq f'(x)(x - \alpha).$$

Puisque $f'(x) > 0$,

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \leq x - \alpha,$$

et donc

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \geq \alpha.$$

Ainsi

$$\alpha \leq N_f(x) < x.$$

Partant de $x_0 \in (\alpha, b]$, tous les termes restent dans $[\alpha, b]$. La suite est décroissante tant qu'elle n'a pas atteint α , et minorée par α . Elle converge donc vers un réel $\ell \in [\alpha, b]$.

La fonction N_f est continue sur $[\alpha, b]$, car f' ne s'y annule pas. En passant à la limite dans

$$x_{n+1} = N_f(x_n),$$

on obtient

$$\ell = N_f(\ell),$$

donc $f(\ell) = 0$. Comme f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$, ce zéro est unique :

$$\boxed{\ell = \alpha.}$$

Le résultat est **global sur l'intervalle** $[\alpha, b]$, **du côté droit de la racine** : aucun voisinage petit de α n'est imposé au point initial.

Le rôle des hypothèses est visible dans les deux inégalités :

- $f' > 0$ garantit que $f(x) > 0$, que le quotient de Newton est défini et que $N_f(x) < x$;
- la convexité donne, par la position de la courbe par rapport à sa tangente, l'inégalité $N_f(x) \geq \alpha$.

La géométrie empêche donc ici les itérés de « dépasser » la racine vers la gauche.

III Ce que l'on peut garantir près d'une racine simple

7

La fonction d'itération près de la racine

Comme $f'(\alpha) \neq 0$ et f' est continue, il existe un voisinage J de α sur lequel f' garde un signe constant et ne s'annule pas.

Sur J ,

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. En dérivant,

$$N'_f(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

d'où

$$\boxed{N'_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.}$$

Comme $f(\alpha) = 0$,

$$N_f(\alpha) = \alpha$$

et

$$\boxed{N'_f(\alpha) = 0.}$$

Ce dernier fait est le mécanisme local essentiel : au voisinage de la racine, la fonction d'itération est beaucoup plus plate qu'une application contractante quelconque.

8

Théorème de convergence locale

La fonction N'_f est continue au voisinage de α et

$$N'_f(\alpha) = 0.$$

Fixons par exemple

$$q = \frac{1}{2}.$$

Il existe $r > 0$, choisi assez petit pour que

$$[\alpha - r, \alpha + r] \subset J$$

et

$$|N'_f(x)| \leq q \quad \text{pour tout } x \in [\alpha - r, \alpha + r].$$

Pour tout x de cet intervalle, le théorème des accroissements finis appliqué à N_f entre x et α donne

$$|N_f(x) - N_f(\alpha)| \leq q|x - \alpha|.$$

Comme $N_f(\alpha) = \alpha$,

$$\boxed{|N_f(x) - \alpha| \leq q|x - \alpha|}.$$

En particulier,

$$|N_f(x) - \alpha| \leq qr < r,$$

donc

$$N_f([\alpha - r, \alpha + r]) \subset [\alpha - r, \alpha + r].$$

L'intervalle est invariant.

Si x_0 y appartient, tous les x_n y appartiennent donc et la suite est bien définie. En outre,

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq q|x_n - \alpha|.$$

Par récurrence,

$$|x_n - \alpha| \leq q^n |x_0 - \alpha|.$$

Comme $0 < q < 1$,

$$q^n \longrightarrow 0,$$

et finalement

$$\boxed{x_n \longrightarrow \alpha}.$$

Stratégie de preuve. On ne cherche pas d'abord à étudier directement la suite. On étudie la fonction d'itération. Le fait $N'_f(\alpha) = 0$ permet de rendre N_f contractante sur un voisinage assez petit ; le théorème des accroissements finis transforme cette information différentielle en une estimation sur les itérés.

9

Local contre global

Le théorème de la question 6 demande des hypothèses fortes sur tout un intervalle : signe strict de f' et convexité. En échange, tout point initial de cet intervalle, du côté considéré, converge.

Le théorème de la question 8 ne demande ni convexité globale ni monotonie de f sur un grand intervalle. Une racine simple et une régularité locale suffisent. En revanche, il ne garantit la convergence que pour les points initiaux **suffisamment proches** de α .

Rien dans la preuve ne contrôle ce que fait N_f loin de α : le dénominateur peut s'annuler, l'itération peut sortir de la zone où $|N_f| < 1$, ou la dynamique peut posséder d'autres comportements. La partie V montrera que cette réserve n'est pas seulement technique.

IV Estimation de l'erreur et ordre de convergence

10

Formule exacte de l'erreur à un facteur intermédiaire près

Appliquons Taylor-Lagrange à f , entre x_n et α . Il existe ξ_n entre ces deux points tel que

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi_n)(\alpha - x_n)^2.$$

Comme $f(\alpha) = 0$ et $e_n = x_n - \alpha$,

$$0 = f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2.$$

Ainsi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}e_n^2.$$

Or

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Par conséquent

$$e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}e_n^2.$$

Reprenons le segment $K = [\alpha - r, \alpha + r]$ construit à la question 8, en diminuant r si nécessaire. Tous les x_n ainsi que les points ξ_n appartiennent à K . Les fonctions $|f'|$ et $|f''|$ y sont continues et f' ne s'y annule pas ; il existe donc

$$m = \min_{x \in K} |f'(x)| > 0$$

et

$$M = \max_{x \in K} |f''(x)| < +\infty.$$

Donc

$$|e_{n+1}| \leq \frac{M}{2m} |e_n|^2.$$

On peut prendre

$$C = \frac{M}{2m}.$$

11

Une contraction qui s'accélère

Supposons que la suite n'atteigne pas α en un nombre fini d'étapes. Les erreurs sont alors toutes non nulles. D'après la question 10,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \leq C |e_n|.$$

Or $e_n \rightarrow 0$, donc

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \rightarrow 0.$$

À la question 8, on obtenait un facteur de contraction fixe $q < 1$: l'erreur décroissait au moins géométriquement. Ici, le facteur effectif entre deux erreurs successives tend lui-même vers 0. Plus on approche de la racine, plus la contraction devient forte. C'est le premier signe précis de l'accélération propre à la méthode de Newton près d'une racine simple.

12

Ordre exactement 2

La formule de la question 10 donne, lorsque $e_n \neq 0$,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|}.$$

Comme

$$x_n \rightarrow \alpha$$

et ξ_n est situé entre x_n et α ,

$$\xi_n \rightarrow \alpha.$$

Par continuité de f' et f'' ,

$$\frac{|f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|} \rightarrow \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}.$$

Sous l'hypothèse $f''(\alpha) \neq 0$, cette limite est finie et strictement positive. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|},$$

et la convergence est d'ordre exactement 2.

Si $f''(\alpha) = 0$ et si les erreurs restent non nulles, la même formule conduit seulement à

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} \longrightarrow 0.$$

Cela exclut l'ordre exactement 2 au sens défini ici, mais ne suffit pas à déterminer un ordre exact supérieur : une régularité et une information supplémentaires sur les dérivées suivantes seraient nécessaires. Il peut aussi arriver que la racine soit atteinte en un nombre fini d'étapes.

Par exemple, pour

$$f(x) = x + x^3, \quad \alpha = 0,$$

on a $f'(0) = 1$ mais $f''(0) = 0$, et

$$N_f(x) = x - \frac{x + x^3}{1 + 3x^2} = \frac{2x^3}{1 + 3x^2}.$$

Ainsi, pour x petit,

$$N_f(x) \sim 2x^3,$$

ce qui fait apparaître un comportement cubique plutôt que quadratique.

V Les limites du théorème

13

Un cycle de Newton

On considère

$$p(x) = x^3 - 2x + 2.$$

Sa dérivée est

$$p'(x) = 3x^2 - 2.$$

Les deux points critiques sont

$$\pm a, \quad a = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Or

$$p(a) = a^3 - 2a + 2 = 2 - \frac{4}{3}a > 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} > 0,$$

et

$$p(-a) = 2 + \frac{4}{3}a > 0.$$

La fonction tend vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, puis croît jusqu'au maximum local en $-a$, qui est positif. Elle possède donc exactement un zéro sur $] -\infty, -a[$. Entre les deux points critiques elle reste positive, puisque son minimum local $p(a)$ est positif, et elle est ensuite croissante et positive.

De plus,

$$p(-2) = -2 < 0, \quad p(-1) = 3 > 0,$$

donc

$$\alpha \in]-2, -1[.$$

Comme $\alpha < -a$, on a

$$p'(\alpha) > 0,$$

donc le zéro est simple.

La fonction de Newton est

$$N_p(x) = x - \frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2}.$$

En 0,

$$N_p(0) = 0 - \frac{2}{-2} = 1.$$

En 1,

$$N_p(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

Par conséquent, si $x_0 = 0$,

$$0, 1, 0, 1, \dots$$

et la suite ne converge pas.

On a donc un polynôme de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec un unique zéro réel simple, pour lequel Newton échoue depuis un point initial où toutes les itérations considérées sont parfaitement définies.

L'affirmation

« Si f est suffisamment régulière et possède un zéro réel simple, alors la suite de Newton converge vers ce zéro depuis tout point initial où l'itération est définie »

est donc fausse.

Ce contre-exemple sépare nettement **convergence locale** et **convergence globale**.

14

Une racine multiple : convergence seulement linéaire

Soit

$$f(x) = (x - \alpha)^m, \quad m \geq 2.$$

Pour $x \neq \alpha$,

$$f'(x) = m(x - \alpha)^{m-1}.$$

Donc

$$N_f(x) = x - \frac{(x - \alpha)^m}{m(x - \alpha)^{m-1}} = x - \frac{x - \alpha}{m}.$$

Ainsi

$$N_f(x) - \alpha = \left(1 - \frac{1}{m}\right)(x - \alpha).$$

Si $e_n = x_n - \alpha$,

$$e_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)e_n,$$

d'où

$$e_n = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n e_0.$$

Le rapport des erreurs est constant :

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 1 - \frac{1}{m} \in (0, 1).$$

Le rapport tend donc vers le nombre $1 - 1/m \in (0, 1)$: au sens de la définition donnée dans le sujet, la convergence est linéaire (ou d'ordre 1). En outre,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{1 - 1/m}{|e_n|} \rightarrow +\infty,$$

puisque $|e_n| \rightarrow 0$. Elle n'est donc pas au moins quadratique.

Ici

$$f'(\alpha) = 0.$$

La racine n'est pas simple. C'est précisément l'hypothèse qui disparaît, et avec elle le mécanisme

$$N'_f(\alpha) = 0$$

utilisé pour obtenir l'accélération quadratique.

La méthode peut donc encore converger vers une racine multiple, mais la convergence quadratique disparaît ici : elle est remplacée par une convergence linéaire.

15

Synthèse des hypothèses

Un énoncé correct est le suivant.

Théorème de convergence locale de Newton. Soit I un intervalle ouvert, $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et $\alpha \in I$ une racine simple de f , c'est-à-dire

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) \neq 0.$$

Alors il existe $r > 0$ tel que, pour tout

$$x_0 \in [\alpha - r, \alpha + r],$$

la suite de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est bien définie, reste dans ce voisinage et converge vers α . De plus, il existe $C > 0$ tel que

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2.$$

La convergence est donc au moins quadratique. Si, en outre,

$$f''(\alpha) \neq 0$$

et si la racine n'est pas atteinte en un nombre fini d'étapes, alors

$$\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} \longrightarrow \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|},$$

et la convergence est d'ordre exactement 2.

Le rôle des hypothèses se résume ainsi.

Hypothèse ou condition	Rôle
$f'(\alpha) \neq 0$	Rend la racine simple ; garantit que f' reste non nul dans un voisinage ; permet de définir N_f près de α et donne $N'_f(\alpha) = 0$.
$f \in \mathcal{C}^2$ près de α	Assure la continuité de N'_f dans la preuve locale et permet Taylor-Lagrange ainsi que l'estimation quadratique. Cette régularité est suffisante pour la preuve donnée ; elle n'est pas revendiquée comme minimale.
x_0 suffisamment proche de α	Maintient les itérés dans la zone où N_f est contractante et où le dénominateur ne s'annule pas. Le cycle $0 \leftrightarrow 1$ montre qu'on ne peut pas supprimer cette restriction en général.
Convexité sur un intervalle	Dans le critère global de la partie II, empêche les tangentes de produire un itéré situé de l'autre côté de la racine : elle fournit $N_f(x) \geq \alpha$. Elle n'est pas nécessaire au théorème local.
f' de signe constant non nul sur l'intervalle	Garantit que l'itération y est définie, que f est strictement monotone et que l'itéré progresse vers la racine dans le critère global.
$f''(\alpha) \neq 0$	N'est pas nécessaire à la convergence locale ni à la majoration quadratique ; elle sert à obtenir une limite quadratique strictement positive et donc l'ordre exactement 2.

Pour la préparation à l'agrégation

Quatre éléments sont particulièrement réutilisables.

1 —

Le théorème à savoir formuler proprement. Au voisinage d'une racine simple d'une fonction $\mathcal{C}^2$, Newton est bien défini pour tout point initial suffisamment proche et converge au moins quadratiquement.

2 —

Le canevas de preuve.

$$N_f(\alpha) = \alpha, \quad N'_f(\alpha) = 0$$

puis continuité de N'_f , contraction locale par le théorème des accroissements finis, et enfin Taylor-Lagrange pour passer de la convergence à l'estimation quadratique.

3 _____

La distinction local/global. La convexité et la monotonie peuvent fournir un théorème global sur un intervalle, mais la régularité et la simplicité de la racine ne suffisent pas à garantir une convergence depuis tout point initial.

4 _____

Deux contre-exemples à retenir.

$$p(x) = x^3 - 2x + 2$$

donne le cycle de Newton $0 \leftrightarrow 1$, malgré un unique zéro réel simple ; et

$$f(x) = (x - \alpha)^m, \quad m \geq 2,$$

montre qu'une racine multiple peut faire tomber la convergence de quadratique à linéaire.