

CORRIGÉ

Agrégation interne · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°02 — Racines de l'unité, polynôme minimal et matrices d'ordre fini

Nombres complexes et racines de l'unité · Polynômes annulateurs et polynôme minimal · Valeurs propres et diagonalisabilité · Matrices d'ordre fini · Rotations et similitude réelle

Les solutions relient les racines de l'unité aux polynômes annulateurs, au polynôme minimal, à la diagonalisabilité et aux matrices réelles d'ordre fini.

I Racines de l'unité

1.

L'équation $z^6 = 1$ donne

$$z = e^{ik\pi/3}, \quad k = 0, \dots, 5.$$

Les six racines sont donc

$$1, \quad e^{i\pi/3}, \quad e^{2i\pi/3}, \quad -1, \quad e^{-2i\pi/3}, \quad e^{-i\pi/3}.$$

Dans $\mathbb{C}[X]$,

$$X^6 - 1 = \prod_{k=0}^5 (X - e^{ik\pi/3}).$$

On regroupe les racines conjuguées :

$$\begin{aligned} (X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}) &= X^2 - X + 1, \\ (X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3}) &= X^2 + X + 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).$$

Les deux facteurs quadratiques ont pour discriminant -3 ; ils sont donc irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2.

Les solutions de $z^m = 1$ sont

$$z_k = e^{2ik\pi/m} = \omega_m^k, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Si $z_k = z_\ell$, alors

$$e^{2i\pi(k-\ell)/m} = 1,$$

donc $(k - \ell)/m \in \mathbb{Z}$. Comme $k, \ell \in \{0, \dots, m-1\}$, on a $|k - \ell| < m$, donc $k = \ell$.

Nous avons donc m racines distinctes d'un polynôme unitaire de degré m . Par conséquent,

$$X^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1} (X - \omega_m^k).$$

Toutes les racines de $X^m - 1$ sont simples.

3.

On calcule

$$\begin{aligned} P_\theta(X) &= (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) \\ &= X^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})X + 1 \\ &= X^2 - 2\cos\theta X + 1. \end{aligned}$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta.$$

Comme $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $\sin\theta \neq 0$, donc $\Delta < 0$. Puisque P_θ est de degré 2, il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Si m est impair, 1 est la seule racine réelle de $X^m - 1$. Les autres racines se regroupent en couples conjugués :

$$X^m - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^{(m-1)/2} P_{2k\pi/m}(X).$$

Si m est pair, 1 et -1 sont les deux racines réelles :

$$X^m - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{m/2-1} P_{2k\pi/m}(X).$$

Ces formules restent valables pour $m = 1$ et $m = 2$ grâce à la convention sur le produit vide.

II Une relation polynomiale satisfaite par une matrice

4.

Comme $Av = \lambda v$, une récurrence donne

$$A^k v = \lambda^k v$$

pour tout $k \geq 0$. Par conséquent,

$$P(A)v = \sum_{k=0}^n a_k A^k v = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k v = P(\lambda)v.$$

Ainsi,

$$P(A)v = P(\lambda)v.$$

Si $P(A) = 0$, alors $P(\lambda)v = 0$. Comme $v \neq 0$,

$$P(\lambda) = 0.$$

Toute valeur propre de A est donc une racine de tout polynôme annulateur de A .

Si $A^m = I_d$, le polynôme $X^m - 1$ annule A . Toute valeur propre λ vérifie alors

$$\boxed{\lambda^m = 1.}$$

Les valeurs propres de A sont donc des racines m -ièmes de l'unité. Cela ne signifie pas que toutes les racines m -ièmes de l'unité sont nécessairement valeurs propres de A .

III Le polynôme minimal

5.

L'espace vectoriel $M_d(\mathbb{K})$ est de dimension d^2 . La famille

$$I_d, A, A^2, \dots, A^{d^2}$$

contient $d^2 + 1$ éléments ; elle est donc liée. Il existe des scalaires $a_0, \dots, a_{d^2}$, non tous nuls, tels que

$$a_0 I_d + a_1 A + \dots + a_{d^2} A^{d^2} = 0.$$

Le polynôme non nul

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{d^2} X^{d^2}$$

vérifie alors $P(A) = 0$.

6.

Soit P un polynôme annulateur de A . Effectuons sa division euclidienne par μ_A :

$$P = Q\mu_A + R, \quad R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg R < \deg \mu_A.$$

En évaluant en A ,

$$0 = P(A) = Q(A)\mu_A(A) + R(A) = R(A).$$

Si $R \neq 0$, alors R serait un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à celui de μ_A , contradiction. Ainsi $R = 0$, donc

$$\boxed{\mu_A \mid P.}$$

Si ν est un autre polynôme unitaire annulateur de degré minimal, alors $\mu_A \mid \nu$. Les deux polynômes ont le même degré et sont unitaires, donc $\nu = \mu_A$. Le polynôme minimal est unique.

7.

Pour

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on a $D^2 = I_2$, donc $(D - I_2)(D + I_2) = 0$. Ainsi $\mu_D \mid X^2 - 1$.

Un polynôme unitaire de degré 1 annihilant D serait de la forme $X - a$, ce qui imposerait $D = aI_2$, impossible. Donc

$$\mu_D = X^2 - 1.$$

Pour

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$J - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (J - I_2)^2 = 0.$$

Ainsi

$$\mu_J = (X - 1)^2.$$

Ces exemples montrent qu'un polynôme annulateur n'est pas automatiquement le polynôme minimal : tout multiple de μ_A est encore annulateur.

IV Quand un polynôme force la diagonalisabilité

8.

Pour $k \in \{1, \dots, s\}$,

$$L_j(\lambda_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Le polynôme

$$S(X) = \sum_{j=1}^s L_j(X) - 1$$

est de degré au plus $s - 1$ et possède les s racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Il est donc nul :

$$\sum_{j=1}^s L_j = 1.$$

De plus,

$$(X - \lambda_j)L_j(X) = \frac{P(X)}{\prod_{\ell \neq j} (\lambda_j - \lambda_\ell)}.$$

Le dénominateur est non nul. En évaluant en A ,

$$(A - \lambda_j I_d)L_j(A) = 0,$$

donc

$$\text{Im } L_j(A) \subset \ker(A - \lambda_j I_d).$$

Enfin,

$$I_d = \sum_{j=1}^s L_j(A).$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^d$,

$$x = \sum_{j=1}^s L_j(A)x,$$

et chaque terme appartient à un espace propre de A . La somme des espaces propres est donc égale à $\mathbb{C}^d$. Comme les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, la concaténation d'une base de chacun de ces espaces propres fournit une base de $\mathbb{C}^d$ formée de vecteurs propres. Ainsi

A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

9.

Supposons A diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, et posons

$$P(X) = \prod_{j=1}^s (X - \lambda_j).$$

Dans une base de vecteurs propres, $P(A)$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les $P(\lambda_j)$, tous nuls. Ainsi $P(A) = 0$, donc $\mu_A \mid P$.

Réciproquement, pour chaque j , choisissons un vecteur propre $v_j \neq 0$ associé à λ_j . Comme

$$\mu_A(A)v_j = \mu_A(\lambda_j)v_j = 0,$$

on obtient $\mu_A(\lambda_j) = 0$. Chaque $X - \lambda_j$ divise donc μ_A et, les λ_j étant distincts,

$$P \mid \mu_A.$$

Finalement,

$$\mu_A(X) = \prod_{j=1}^s (X - \lambda_j).$$

Le polynôme minimal d'une matrice diagonalisable est donc scindé à racines simples. La réciproque résulte de la question 8 puisque $\mu_A(A) = 0$. Ainsi,

A diagonalisable sur $\mathbb{C} \iff \mu_A$ scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples.

V Matrices d'ordre fini

10.

Soit r l'ordre de A . Alors $A^r = I_d$, donc $X^r - 1$ est un polynôme annulateur de A .

D'après la partie I, il est scindé sur $\mathbb{C}$ et ses racines sont simples. La question 8 donne alors

A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

D'autre part, pour toute valeur propre λ , la question 4 donne

$$\lambda^r = 1.$$

Ainsi,

$\text{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : z^r = 1\}$.

Toutes les valeurs propres de A sont donc des racines de l'unité.

11.

Comme $X^r - 1$ annule A , la propriété caractéristique du polynôme minimal donne

$$\mu_A \mid X^r - 1 \quad \text{dans } \mathbb{K}[X].$$

Il reste à vérifier que $X^r - 1$ ne contient aucun facteur irréductible répété dans $\mathbb{K}[X]$.

Supposons qu'un polynôme non constant Q vérifie $Q^2 \mid X^r - 1$. En écrivant $X^r - 1 = Q^2 R$ puis en dérivant, on voit que Q divise aussi rX^{r-1} . Or

$$(X^r - 1) - \frac{X}{r} rX^{r-1} = -1.$$

Un polynôme non constant ne peut donc diviser simultanément $X^r - 1$ et sa dérivée. Ainsi $X^r - 1$ est sans facteur carré dans $\mathbb{K}[X]$.

Tout diviseur de $X^r - 1$, et en particulier μ_A , est donc un produit de polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts.

12.

Puisque A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, il existe $S \in GL_d(\mathbb{C})$ tel que

$$A = SDS^{-1}, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d).$$

Pour tout $m \geq 1$,

$$A^m = I_d \iff D^m = I_d \iff \lambda_j^m = 1 \quad \text{pour tout } j.$$

Par définition de n_j ,

$$\lambda_j^m = 1 \iff n_j \mid m.$$

Le plus petit entier divisible par tous les n_j est leur ppcm. Par conséquent,

$$\text{ord}(A) = \text{ppcm}(n_1, \dots, n_d).$$

13.

Supposons

$$A = SDS^{-1}, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d),$$

et supposons chaque λ_j racine de l'unité. Notons n_j son ordre et

$$N = \text{ppcm}(n_1, \dots, n_d).$$

Alors $\lambda_j^N = 1$ pour tout j , donc $D^N = I_d$ et

$$A^N = S D^N S^{-1} = I_d.$$

Ainsi A est d'ordre fini. On obtient la caractérisation

$$A \in GL_d(\mathbb{C}) \text{ est d'ordre fini} \iff A \text{ est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont des racines de l'unité.}$$

VI Le cas réel et les rotations

14.

Un calcul direct, ou la formule $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, donne

$$R_\theta^2 - 2 \cos \theta R_\theta + I_2 = 0.$$

Le polynôme

$$P_\theta = X^2 - 2 \cos \theta X + 1$$

annule donc R_θ . Comme $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $\sin \theta \neq 0$, donc R_θ n'est pas scalaire. Aucun polynôme unitaire de degré 1 ne peut l'annuler. Ainsi

$$\mu_{R_\theta} = X^2 - 2 \cos \theta X + 1.$$

Prenons $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On calcule

$$\det(v, R_\theta v) = \|v\|^2 \sin \theta \neq 0.$$

La famille $\mathcal{B} = (v, R_\theta v)$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$. La relation précédente donne

$$R_\theta(R_\theta v) = -v + 2 \cos \theta R_\theta v.$$

Dans la base $\mathcal{B}$,

$$[R_\theta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \cos \theta \end{pmatrix}.$$

L'égalité de deux polynômes minimaux ne suffit pas, en général, à conclure que deux matrices sont semblables ; ici, la similitude est obtenue par la construction explicite d'une base.

15.

Soit r l'ordre de A . On sait que

$$\mu_A \mid X^r - 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}[X].$$

D'après la partie I, les facteurs irréductibles réels de $X^r - 1$ sont éventuellement $X - 1$, éventuellement $X + 1$, et les polynômes

$$X^2 - 2 \cos \left(\frac{2k\pi}{r} \right) X + 1$$

correspondant aux couples de racines non réelles conjuguées. De plus, $X^r - 1$ n'a aucun facteur répété. Le polynôme minimal, qui en est un diviseur, est donc un produit d'un sous-ensemble de ces facteurs.

En choisissant pour chaque couple conjugué l'unique angle dans $(0, \pi)$, on obtient

$$\mu_A(X) = (X - 1)^{\varepsilon_+} (X + 1)^{\varepsilon_-} \prod_{j=1}^q (X^2 - 2 \cos \theta_j X + 1),$$

avec

$$\varepsilon_+, \varepsilon_- \in \{0, 1\}, \quad \theta_j \in (0, \pi) \cap 2\pi\mathbb{Q},$$

et les θ_j deux à deux distincts.

16.

Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$ d'ordre fini. D'après la question 10, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

Premier cas : les valeurs propres sont réelles. Les seules racines de l'unité réelles sont 1 et -1 . Puisque A est diagonalisable, trois possibilités subsistent :

$$A = I_2, \quad A = -I_2, \quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or $I_2 = R_0$ et $-I_2 = R_\pi$.

Second cas : A possède une valeur propre non réelle. Comme les valeurs propres non réelles d'une matrice réelle viennent par paires conjuguées, on peut choisir

$$\lambda = e^{i\theta}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

Puisque λ est une racine de l'unité,

$$\theta \in 2\pi\mathbb{Q}.$$

Prenons un vecteur propre complexe $z = u + iv \neq 0$ associé à λ , avec $u, v \in \mathbb{R}^2$. De

$$A(u + iv) = (\cos \theta + i \sin \theta)(u + iv)$$

on tire

$$Au = \cos \theta u - \sin \theta v,$$

$$Av = \sin \theta u + \cos \theta v.$$

Les vecteurs u et v sont indépendants. En effet, s'ils étaient liés, z serait un multiple complexe non nul d'un vecteur réel $w \neq 0$; l'égalité $Az = \lambda z$ entraînerait alors $Aw = \lambda w$, impossible puisque Aw est réel et $\lambda \notin \mathbb{R}$.

Dans la base $(u, -v)$, la matrice de A est

$$R_\theta.$$

Ainsi A est semblable à une rotation d'angle appartenant à $(0, \pi) \cap 2\pi\mathbb{Q}$.

Réciproquement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I_2,$$

et

$$R_\theta^m = R_{m\theta}.$$

Une rotation R_θ est donc d'ordre fini si et seulement si $\theta/(2\pi) \in \mathbb{Q}$.

Enfin,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant -1 , tandis que toutes les rotations ont déterminant 1 . De plus, pour $\theta, \varphi \in [0, \pi]$, deux rotations semblables ont la même trace, donc

$$2 \cos \theta = 2 \cos \varphi,$$

et la stricte décroissance du cosinus sur $[0, \pi]$ donne $\theta = \varphi$.

On obtient donc une famille sans doublons de représentants des classes de similitude :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_\theta \text{ pour } \theta \in [0, \pi] \cap 2\pi\mathbb{Q}.$$

Retour vers le sujet d'agrégation 2025

Les questions suivantes de la première épreuve écrite de l'agrégation interne de mathématiques 2025 mobilisent directement les résultats établis ici :

- questions 8 et 9 : factorisation de $X^n - 1$ sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$;
- questions 12 et 13 : diagonalisation et polynôme minimal des matrices d'ordre fini ;
- question 20(b) : ordre d'une matrice à partir des ordres de ses valeurs propres ;
- question 21 : rotation, polynôme minimal et matrice compagnon ;
- question 22 : forme du polynôme minimal dans le cas réel ;
- question 25 : classification en dimension 2.

Les questions 23 et 24 prolongent ces idées en dimension quelconque en décrivant des formes diagonales par blocs et l'ordre des matrices réelles d'ordre fini.

SOURCES

Agrégation interne de mathématiques — session 2025 — première épreuve écrite. [Lien direct](#)