

DM n°02 — Racines de l'unité, polynôme minimal et matrices d'ordre fini

Nombres complexes et racines de l'unité · Polynômes annulateurs et polynôme minimal · Valeurs propres et diagonalisabilité · Matrices d'ordre fini · Rotations et similitude réelle

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. On note $M_d(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille d à coefficients dans $\mathbb{K}$, et I_d la matrice identité.

Une matrice $A \in GL_d(\mathbb{K})$ est dite **d'ordre fini** lorsqu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que

$$A^m = I_d.$$

Son **ordre** est le plus petit entier $m \geq 1$ vérifiant cette égalité.

Le problème relie cette relation aux racines de l'unité, aux polynômes annulateurs, au polynôme minimal et à la diagonalisation, puis étudie le cas réel en dimension 2.

I Racines de l'unité

- 1 Déterminer les six solutions complexes de

$$z^6 = 1.$$

En déduire les factorisations de $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

- 2 Soit $m \geq 1$ et

$$\omega_m = e^{2i\pi/m}.$$

Déterminer toutes les racines complexes de $X^m - 1$, montrer qu'elles sont deux à deux distinctes et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

- 3 Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose

$$P_\theta(X) = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

Déterminer P_θ explicitement et montrer qu'il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

En regroupant les racines complexes conjuguées, factoriser $X^m - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, suivant la parité de m .

On adoptera la convention qu'un produit portant sur un ensemble vide vaut 1.

II Une relation polynomiale satisfaite par une matrice

Si

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$$

et $A \in M_d(\mathbb{K})$, on définit

$$P(A) = a_0 I_d + a_1 A + \cdots + a_n A^n.$$

Un polynôme non nul P tel que $P(A) = 0$ est appelé **polynôme annulateur** de A .

- 4 Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$, et soit λ une valeur propre de A , associée à un vecteur propre $v \neq 0$.
Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(A)v = P(\lambda)v.$$

Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de A lorsque P est un polynôme annulateur ?

Appliquer ce résultat au cas où $A^m = I_d$.

III Le polynôme minimal

On pourra utiliser le fait que $M_d(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension d^2 sur $\mathbb{K}$.

- 5 Soit $A \in M_d(\mathbb{K})$.
Montrer qu'il existe au moins un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(A) = 0.$$

- 6 Parmi les polynômes annulateurs non nuls de A , on choisit un polynôme unitaire μ_A de degré minimal.
Montrer que tout polynôme annulateur de A est divisible par μ_A .
En déduire que μ_A est unique. On l'appelle le **polynôme minimal** de A .
- 7 Déterminer les polynômes minimaux des matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Que montrent ces deux exemples sur l'information contenue dans un polynôme annulateur ?

IV Quand un polynôme force la diagonalisabilité

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ des nombres complexes deux à deux distincts et

$$P(X) = \prod_{j=1}^s (X - \lambda_j).$$

Pour $j \in \{1, \dots, s\}$, on pose

$$L_j(X) = \prod_{\substack{1 \leq \ell \leq s \\ \ell \neq j}} \frac{X - \lambda_\ell}{\lambda_j - \lambda_\ell}.$$

- 8 Montrer que

$$\sum_{j=1}^s L_j(X) = 1.$$

Soit maintenant $A \in M_d(\mathbb{C})$ telle que $P(A) = 0$.

Montrer que, pour tout j ,

$$\operatorname{Im} L_j(A) \subset \ker(A - \lambda_j I_d).$$

En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

- 9 Réciproquement, soit $A \in M_d(\mathbb{C})$ diagonalisable et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres distinctes.

Déterminer son polynôme minimal.

En déduire le critère suivant :

$$A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C} \iff \mu_A \text{ est scindé sur } \mathbb{C} \text{ et à racines simples.}$$

V Matrices d'ordre fini

Dans cette partie, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, et une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ pourra naturellement être considérée comme une matrice complexe.

- 10 Soit $A \in GL_d(\mathbb{K})$ d'ordre fini.

Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que chacune de ses valeurs propres est une racine de l'unité.

- 11 Soit r l'ordre de A .

Montrer que le polynôme minimal de A , considéré dans $\mathbb{K}[X]$, est un produit de polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts.

- 12 On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les valeurs propres de A , répétées suivant leur multiplicité, et n_j l'ordre de λ_j dans $\mathbb{C}^\times$. Exprimer l'ordre de A en fonction des n_j .

- 13 Montrer réciproquement qu'une matrice complexe diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont des racines de l'unité est d'ordre fini.

VI Le cas réel et les rotations

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- 14 On suppose $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Déterminer le polynôme minimal de R_θ .

Montrer ensuite que R_θ est semblable sur $\mathbb{R}$ à

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- 15 Soit $A \in GL_d(\mathbb{R})$ une matrice d'ordre fini.

Montrer que son polynôme minimal peut s'écrire

$$\mu_A(X) = (X - 1)^{\varepsilon_+} (X + 1)^{\varepsilon_-} \prod_{j=1}^q (X^2 - 2 \cos \theta_j X + 1),$$

où

$$\varepsilon_+, \varepsilon_- \in \{0, 1\}, \quad \theta_j \in (0, \pi) \cap 2\pi\mathbb{Q},$$

et où les θ_j sont deux à deux distincts.

- 16** Classifier, à similitude près dans $GL_2(\mathbb{R})$, toutes les matrices réelles 2×2 d'ordre fini. Donner une famille de représentants sans doublons.