

CORRIGÉ

L3 · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°03 — Jusqu'à quelle précision peut-on approcher un réel par des fractions ?

Limsup d'ensembles · Mesure de Lebesgue · Borel–Cantelli · Approximation diophantienne

I Appartenir à une infinité d'ensembles

1

(a) Par définition,

$$x \in \limsup A_n \iff \forall N \geq 1, \quad x \in \bigcup_{n \geq N} A_n.$$

Cela équivaut à

$$\forall N \geq 1, \quad \exists n \geq N \text{ tel que } x \in A_n.$$

Autrement dit, les indices n tels que $x \in A_n$ ne sont pas bornés. Il y en a donc une infinité. Réciproquement, si x appartient à une infinité de A_n , alors, pour tout N , l'un de ces indices est supérieur ou égal à N , donc $x \in \bigcup_{n \geq N} A_n$. Ainsi

$$x \in \limsup A_n \iff x \text{ appartient à une infinité de } A_n.$$

(b) On a

$$B_N = \bigcup_{n \geq N} A_n.$$

Quand N augmente, on retire éventuellement des ensembles de l'union, donc

$$B_{N+1} \subset B_N.$$

La suite (B_N) est décroissante et

$$\bigcap_{N \geq 1} B_N = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_n = \limsup A_n.$$

2

Chaque B_N est mesurable comme union dénombrable d'ensembles mesurables. Par sous-additivité dénombrable,

$$\nu(B_N) = \nu\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right) \leq \sum_{n \geq N} \nu(A_n).$$

L'hypothèse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) < +\infty$$

implique en particulier

$$\nu(B_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) < +\infty.$$

La suite (B_N) étant décroissante et le premier terme ayant une mesure finie, la continuité décroissante s'applique :

$$\nu(\limsup A_n) = \nu\left(\bigcap_{N \geq 1} B_N\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu(B_N).$$

Or

$$0 \leq \nu(B_N) \leq \sum_{n \geq N} \nu(A_n),$$

et le reste d'une série convergente à termes positifs tend vers 0. Par encadrement,

$$\boxed{\nu(\limsup A_n) = 0.}$$

II Mesurer les approximations à l'échelle $q^{-\tau}$

3

(a) Pour $p \in \mathbb{Z}$, posons

$$I_{p,q}(\tau) = \left(\frac{p}{q} - q^{-\tau}, \frac{p}{q} + q^{-\tau} \right).$$

Alors

$$E_q(\tau) = [0, 1] \cap \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} I_{p,q}(\tau).$$

Chaque $I_{p,q}(\tau)$ est ouvert, l'union est dénombrable, donc elle est borélienne. Son intersection avec $[0, 1]$ est encore borélienne. Ainsi $E_q(\tau)$ est un borélien.

(b) Supposons que $I_{p,q}(\tau)$ rencontre $[0, 1]$. Il existe donc $x \in [0, 1]$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau}.$$

Comme $q \geq 2$ et $\tau > 0$, on a $q^{-\tau} < 1$. Par conséquent

$$-1 < \frac{p}{q} < 2,$$

d'où, a fortiori,

$$-q \leq p \leq 2q.$$

(c) Seuls les entiers $p \in \{-q, -q+1, \dots, 2q\}$ peuvent intervenir. Ils sont au nombre de $3q+1$. Chaque intervalle $I_{p,q}(\tau)$ a longueur $2q^{-\tau}$. Par sous-additivité,

$$\lambda(E_q(\tau)) \leq (3q+1) 2q^{-\tau}.$$

Comme $q \geq 1$,

$$2(3q+1) \leq 8q,$$

donc

$$\lambda(E_q(\tau)) \leq 2(3q+1)q^{-\tau} \leq 8q^{1-\tau}.$$

4 _____

(a) La série s'écrit

$$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{\tau-1}}.$$

C'est une série de Riemann. Elle converge exactement lorsque

$$\tau - 1 > 1,$$

c'est-à-dire lorsque

$$\tau > 2.$$

(b) Fixons $\tau > 2$. D'après la question 3,

$$\sum_{q=2}^{\infty} \lambda(E_q(\tau)) \leq 8 \sum_{q=2}^{\infty} q^{1-\tau} < +\infty.$$

La première partie du lemme de Borel–Cantelli, démontrée à la question 2, donne

$$\lambda\left(\limsup_{q \rightarrow \infty} E_q(\tau)\right) = 0.$$

Or appartenir à ce limsup signifie appartenir à $E_q(\tau)$ pour une infinité de dénominateurs q . Pour un q fixé, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p susceptibles de vérifier l'inégalité pour un $x \in [0, 1]$. Ainsi

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} E_q(\tau) = W_{\tau}.$$

Par conséquent

$$\lambda(W_{\tau}) = 0.$$

(c) Fixons $\tau > 2$. Comme $\lambda(W_{\tau}) = 0$, pour presque tout $x \in [0, 1]$ on a $x \notin W_{\tau}$. Par définition de W_{τ} , cela signifie qu'il n'existe qu'un nombre fini de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau}.$$

Ainsi, pour tout $\tau > 2$ fixé, cette inégalité n'a qu'un nombre fini de solutions pour presque tout $x \in [0, 1]$.

L'ordre des quantificateurs est important : à ce stade, l'ensemble exceptionnel peut dépendre de τ . La partie IV construira un même ensemble négligeable permettant de traiter simultanément tous les exposants strictement supérieurs à 2.

III L'exposant 2 apparaît pour tout irrationnel

5

Partageons $[0, 1)$ en les N intervalles

$$\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Les $N + 1$ parties fractionnaires

$$\{0x\}, \{x\}, \dots, \{Nx\}$$

sont réparties dans seulement N intervalles. Par le principe des tiroirs, deux d'entre elles, disons $\{rx\}$ et $\{sx\}$ avec $0 \leq r < s \leq N$, appartiennent au même intervalle. Elles vérifient donc

$$|\{sx\} - \{rx\}| < \frac{1}{N}.$$

Écrivons

$$sx = \lfloor sx \rfloor + \{sx\}, \quad rx = \lfloor rx \rfloor + \{rx\}.$$

En posant

$$q = s - r \quad \text{et} \quad p = \lfloor sx \rfloor - \lfloor rx \rfloor,$$

on obtient $1 \leq q \leq N$ et

$$|qx - p| = |\{sx\} - \{rx\}| < \frac{1}{N}.$$

En divisant par $q > 0$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

Comme $q \leq N$,

$$\frac{1}{qN} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Ainsi

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{q^2}.$$

6

(a) Pour chaque $q \in \{1, \dots, Q\}$, le nombre qx est irrationnel, donc n'est pas entier. Sa distance à $\mathbb{Z}$ est atteinte par un entier le plus proche et elle est strictement positive :

$$\min_{p \in \mathbb{Z}} |qx - p| > 0.$$

On prend ensuite le minimum d'un nombre fini de nombres strictement positifs. Il reste strictement positif :

$$\delta_Q > 0.$$

(b) Fixons $Q \geq 1$. Choisissons un entier N tel que

$$N > Q \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} < \delta_Q.$$

La question 5 fournit des entiers p, q avec $1 \leq q \leq N$ et

$$|qx - p| < \frac{1}{N} < \delta_Q.$$

Si l'on avait $q \leq Q$, la définition de δ_Q imposerait au contraire

$$|qx - p| \geq \delta_Q,$$

ce qui est impossible. Donc $q > Q$. La question 5 donne aussi

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

(c) La question précédente permet, pour chaque Q , de trouver une telle approximation avec $q > Q$. Les dénominateurs obtenus sont donc non bornés ; il y a en particulier une infinité d'approximations rationnelles distinctes vérifiant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

IV Mesurer la qualité d'approximation d'un irrationnel

7

(a) La question 6 montre que l'exposant 2 appartient à l'ensemble dont on prend le supremum dans la définition de $\mu(x)$. Ainsi, pour tout irrationnel x ,

$$\mu(x) \geq 2.$$

(b) Supposons qu'il existe une infinité de couples (p, q) tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau}.$$

Si $0 < s < \tau$, alors, pour tout $q \geq 1$,

$$q^{-\tau} \leq q^{-s}.$$

Les mêmes couples satisfont donc

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-s}.$$

Il y en a encore une infinité.

8 _____

(a) Pour chaque $m \geq 1$, on a $2 + 1/m > 2$. La question 4 donne donc

$$\lambda(F_m) = \lambda(W_{2+1/m}) = 0.$$

Une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, car

$$\lambda(F) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(F_m) = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\lambda(F) = 0.}$$

(b) Soit $x \in [0, 1] \setminus F$ irrationnel et supposons $\mu(x) > 2$. Par définition du supremum, l'ensemble des exposants admissibles ne peut pas être contenu dans $(0, 2]$; il existe donc un exposant $\tau > 2$ pour lequel

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau}$$

admet une infinité de solutions.

Choisissons m assez grand pour que

$$2 + \frac{1}{m} < \tau.$$

D'après la question 7(b), x possède alors une infinité d'approximations d'exposant $2 + 1/m$. Ainsi

$$x \in W_{2+1/m} = F_m \subset F,$$

ce qui contredit $x \notin F$. Par conséquent

$$\boxed{\mu(x) \leq 2.}$$

(c) Pour tout irrationnel $x \in [0, 1] \setminus F$, les questions 7(a) et 8(b) donnent

$$2 \leq \mu(x) \leq 2,$$

donc $\mu(x) = 2$.

Il reste seulement à tenir compte des rationnels. L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est dénombrable, donc négligeable. L'ensemble exceptionnel

$$F \cup (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$$

est donc négligeable. Ainsi

$$\mu(x) = 2 \quad \text{pour presque tout } x \in [0, 1].$$

La définition de μ n'a pas besoin d'être étendue aux rationnels pour obtenir cet énoncé presque partout.

9

(a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \geq 1$,

$$\left| (x + k) - \frac{p}{q} \right| = \left| x - \frac{p - kq}{q} \right|.$$

L'application $p \mapsto p - kq$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ pour chaque q . Les exposants pour lesquels il existe une infinité d'approximations sont donc exactement les mêmes pour x et $x + k$. Ainsi

$$\mu(x + k) = \mu(x).$$

(b) Pour $k \in \mathbb{Z}$, notons N_k l'ensemble exceptionnel dans $[k, k + 1]$. Par translation entière et par la question précédente, N_k est le translaté d'un ensemble négligeable de $[0, 1]$; il est donc négligeable. Or

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k + 1].$$

L'ensemble de tous les réels exceptionnels est contenu dans l'union dénombrable des N_k , donc il est négligeable. Finalement,

$$\mu(x) = 2 \quad \text{pour presque tout réel } x.$$

Ouverture facultative — Des nombres exceptionnellement bien approchés

10

(a) Un nombre de Liouville possède en particulier une infinité d'approximations vérifiant

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-3}.$$

Si $k = \lfloor x \rfloor$, le calcul de la question 9(a) donne $x - k \in W_3$, donc $x \in k + W_3$. L'ensemble des nombres de Liouville est ainsi contenu dans $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k + W_3)$, qui est négligeable par invariance par translation de la mesure de Lebesgue et stabilité par réunion dénombrable. Il est donc de mesure nulle.

(b) Posons

$$L_N = \sum_{j=1}^N 10^{-j!}.$$

C'est un rationnel que l'on peut écrire

$$L_N = \frac{p_N}{q_N}, \quad q_N = 10^{N!},$$

sans exiger que cette écriture soit irréductible. De plus,

$$0 < L - L_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} 10^{-j!}.$$

Pour $N \geq 1$, les exposants $(N+1)!, (N+2)!, \dots$ croissent au moins d'une unité à chaque terme, donc

$$L - L_N < 2 \cdot 10^{-(N+1)!}.$$

Fixons un entier $n \geq 1$. Pour N assez grand, par exemple $N \geq n$, on a

$$2 \cdot 10^{-(N+1)!} < 10^{-nN!} = q_N^{-n}.$$

Ainsi, pour tout n , les troncatures L_N fournissent, pour une infinité de N , des approximations rationnelles telles que

$$0 < \left| L - \frac{p_N}{q_N} \right| < q_N^{-n}.$$

Le nombre L est irrationnel puisque son développement décimal comporte des chiffres 1 à des positions arbitrairement éloignées, séparés par des blocs de zéros de longueur non bornée, donc n'est pas périodique à partir d'un certain rang. Par conséquent

L est un nombre de Liouville.

(c) Écrivons $r = a/b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \geq 1$. Fixons $n \geq 1$. Comme x est de Liouville, il possède, pour des exposants arbitrairement grands, des approximations rationnelles. En particulier, on peut choisir une approximation p/q telle que

$$q > b^n \quad \text{et} \quad 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-(n+1)}.$$

On peut imposer $q > b^n$ car ces dénominateurs sont non bornés : s'ils étaient tous inférieurs à un entier Q , il n'y aurait que finitement de valeurs de q et, pour chacune, seulement un nombre fini de numérateurs p possibles, contradiction.

Alors

$$\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{bp + aq}{bq}$$

et

$$0 < \left| x + r - \frac{bp + aq}{bq} \right| < q^{-(n+1)}.$$

Puisque $q > b^n$,

$$q^{-(n+1)} < b^{-n} q^{-n} = (bq)^{-n}.$$

On obtient donc des approximations d'exposant n de $x+r$. En répétant l'argument avec des dénominateurs arbitrairement grands, il y en a une infinité. Ainsi $x+r$ est encore un nombre de Liouville.

Comme L est de Liouville, tous les nombres

$$L + r, \quad r \in \mathbb{Q},$$

sont de Liouville. Or $L + \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{Q}$ l'est. L'ensemble des nombres de Liouville est donc **dense dans $\mathbb{R}$ et de mesure nulle**.