

DM n°03 — Jusqu'à quelle précision peut-on approcher un réel par des fractions ?

Limsup d'ensembles · Mesure de Lebesgue · Borel–Cantelli · Approximation diophantienne

Pour une fraction p/q qui approche un réel x , l'erreur est $|x - p/q|$. Mais une petite erreur n'a de sens qu'en tenant compte du dénominateur q : lorsque q grandit, on peut naturellement espérer gagner en précision. Nous comparerons donc l'erreur à des puissances $q^{-\tau}$. Plus τ est grand, plus la condition $|x - p/q| < q^{-\tau}$ est exigeante. La question est alors précise : quels exposants τ peuvent être atteints une infinité de fois, et que se passe-t-il pour presque tout réel au sens de la mesure de Lebesgue ?

Dans tout le problème, λ désigne la mesure de Lebesgue. On pourra utiliser les propriétés usuelles des mesures : monotonie, sous-additivité dénombrable et continuité croissante ou décroissante lorsqu'elle s'applique.

I Appartenir à une infinité d'ensembles

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de parties mesurables d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \nu)$. On définit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_n.$$

- 1 (a) Montrer que $x \in \limsup A_n$ si et seulement si x appartient à une infinité d'ensembles A_n .
- (b) En posant

$$B_N = \bigcup_{n \geq N} A_n,$$

étudier le sens de variation de la suite (B_N) et identifier son intersection.

- 2 Supposons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) < +\infty.$$

Montrer que

$$\nu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0.$$

On veillera à justifier précisément l'emploi de la continuité décroissante de la mesure.

IDÉE Ce résultat est la première partie du lemme de Borel–Cantelli. Il ne demande aucune hypothèse d'indépendance entre les ensembles.

II Mesurer les approximations à l'échelle $q^{-\tau}$

Pour $\tau > 0$ et $q \geq 2$, on pose

$$E_q(\tau) = \left\{ x \in [0, 1] ; \exists p \in \mathbb{Z}, \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau} \right\}.$$

3 (a) Montrer que $E_q(\tau)$ est un borélien de $[0, 1]$.

(b) Montrer que, si l'intervalle

$$\left(\frac{p}{q} - q^{-\tau}, \frac{p}{q} + q^{-\tau} \right)$$

rencontre $[0, 1]$, alors $-q \leq p \leq 2q$.

(c) En déduire que

$$\lambda(E_q(\tau)) \leq 2(3q + 1)q^{-\tau} \leq 8q^{1-\tau}.$$

4 (a) Déterminer les valeurs de τ pour lesquelles la série

$$\sum_{q=2}^{\infty} q^{1-\tau}$$

converge.

(b) Pour $\tau > 2$, on note

$$W_\tau = \left\{ x \in [0, 1] ; \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau} \text{ pour une infinité de couples } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

Montrer que $\lambda(W_\tau) = 0$.

(c) Dédurre que, pour tout $\tau > 2$ fixé, pour presque tout $x \in [0, 1]$, il n'existe qu'un nombre fini de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau}.$$

III L'exposant 2 apparaît pour tout irrationnel

Pour $y \in \mathbb{R}$, on note $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$ sa partie fractionnaire.

5 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$ un entier. En considérant les $N + 1$ nombres

$$\{0x\}, \{x\}, \dots, \{Nx\}$$

et une partition de $[0, 1)$ en N intervalles de même longueur, montrer qu'il existe des entiers p et q tels que

$$1 \leq q \leq N \quad \text{et} \quad |qx - p| < \frac{1}{N}.$$

En déduire

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{q^2}.$$

6 On suppose désormais x irrationnel.

(a) Pour $Q \geq 1$, on pose

$$\delta_Q = \min_{1 \leq q \leq Q} \min_{p \in \mathbb{Z}} |qx - p|.$$

Montrer que $\delta_Q > 0$.

(b) En choisissant convenablement N dans la question 5, montrer que, pour tout $Q \geq 1$, il existe une approximation p/q telle que

$$q > Q \quad \text{et} \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

(c) En déduire que tout irrationnel possède une infinité d'approximations rationnelles satisfaisant

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

IV Mesurer la qualité d'approximation d'un irrationnel

Pour un irrationnel x , on définit son **exposant d'irrationalité** par

$$\mu(x) = \sup \left\{ \tau > 0 ; \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-\tau} \text{ pour une infinité de couples } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\},$$

avec la convention qu'un supremum non borné vaut $+\infty$.

7 (a) Montrer que $\mu(x) \geq 2$ pour tout irrationnel x .

(b) Si un irrationnel admet une infinité d'approximations avec un exposant τ , montrer qu'il en admet aussi une infinité avec tout exposant s vérifiant $0 < s < \tau$.

8 Pour $m \geq 1$, on pose

$$F_m = W_{2+1/m} \quad \text{et} \quad F = \bigcup_{m \geq 1} F_m.$$

(a) Montrer que F est négligeable.

(b) Soit $x \in [0, 1] \setminus F$ irrationnel. Montrer que l'hypothèse $\mu(x) > 2$ conduit à une contradiction.

(c) Conclure que

$$\mu(x) = 2$$

pour presque tout $x \in [0, 1]$.

IDÉE Le passage par la suite dénombrable d'exposants $2 + 1/m$ est essentiel : une union non dénombrable d'ensembles négligeables n'est pas nécessairement négligeable.

9 (a) Montrer que, pour tout entier k et tout irrationnel x ,

$$\mu(x + k) = \mu(x).$$

(b) En déduire finalement que

$$\mu(x) = 2 \quad \text{pour presque tout réel } x.$$

Ouverture facultative — Des nombres exceptionnellement bien approchés

On appelle **nombre de Liouville** tout irrationnel x tel que, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-n}$$

admet une infinité de solutions $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

10 (a) Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est de mesure nulle.

(b) On pose

$$L = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}.$$

Montrer que L est un nombre de Liouville.

(c) Montrer que, si x est un nombre de Liouville et $r \in \mathbb{Q}$, alors $x + r$ est encore un nombre de Liouville. En déduire que l'ensemble des nombres de Liouville est dense dans $\mathbb{R}$.