

CORRIGÉ

L3 · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°04 — Que cachent les chiffres d'un réel typique ?

Mesure de Lebesgue · Intervalles dyadiques · Développement binaire · Ensembles négligeables

I Des préfixes aux intervalles dyadiques

1

(a) Par définition,

$$I(u) = \left[\frac{k(u)}{2^n}, \frac{k(u) + 1}{2^n} \right[.$$

Sa longueur vaut donc

$$\frac{k(u) + 1 - k(u)}{2^n} = 2^{-n}.$$

Ainsi

$$\lambda(I(u)) = 2^{-n}.$$

(b) Écrivons

$$x = \sum_{j \geq 1} \frac{\varepsilon_j}{2^j}.$$

En multipliant par 2^n ,

$$2^n x = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j 2^{n-j} + \sum_{j>n} \varepsilon_j 2^{n-j}.$$

Le premier terme est un entier. Le second appartient à $[0, 1]$. Il ne peut être égal à 1, car cela imposerait $\varepsilon_j = 1$ pour tout $j > n$; on aurait alors

$$x = \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j}{2^j} + \frac{1}{2^n},$$

qui est dyadique. Comme x ne l'est pas,

$$0 \leq \sum_{j>n} \varepsilon_j 2^{n-j} < 1.$$

Par conséquent,

$$\lfloor 2^n x \rfloor = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j 2^{n-j}.$$

Or $x \in I(u)$ équivaut à

$$k(u) \leq 2^n x < k(u) + 1,$$

c'est-à-dire à $\lfloor 2^n x \rfloor = k(u)$. L'écriture binaire d'un entier entre 0 et $2^n - 1$ sur n chiffres étant unique, cela équivaut à

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (u_1, \dots, u_n).$$

Donc

$$x \in I(u) \iff \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = u.$$

2

(a) Soit $x \in (0, 1)$ dyadique. On peut écrire

$$x = \frac{k}{2^m}$$

avec $m \geq 1$ choisi minimal. Alors k est impair. L'écriture binaire de k sur m chiffres se termine donc par 1 : il existe des chiffres $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}$ tels que

$$x = 0, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1} 1000 \dots 2.$$

Comme

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^m},$$

on a aussi

$$x = 0, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m-1} 0111 \dots 2.$$

Le réel x possède donc deux développements binaires distincts.

(b) Supposons qu'un réel $x \in (0, 1)$ possède deux développements

$$x = \sum_{j \geq 1} \frac{\varepsilon_j}{2^j} = \sum_{j \geq 1} \frac{\eta_j}{2^j},$$

avec $(\varepsilon_j) \neq (\eta_j)$. Soit p le premier indice où ils diffèrent. En échangeant les deux suites si nécessaire, on peut supposer

$$\varepsilon_p = 0, \quad \eta_p = 1.$$

L'égalité des deux sommes donne

$$\frac{1}{2^p} = \sum_{j > p} \frac{\varepsilon_j - \eta_j}{2^j}.$$

Mais

$$\sum_{j > p} \frac{\varepsilon_j - \eta_j}{2^j} \leq \sum_{j > p} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^p}.$$

Pour atteindre cette valeur maximale, il faut nécessairement

$$\varepsilon_j = 1, \quad \eta_j = 0 \quad (j > p).$$

Le second développement est donc terminé à partir du rang p : x est dyadique. Ainsi, dans $(0, 1)$, les réels possédant deux développements sont exactement les dyadiques.

(c) Pour tout $m \geq 0$, l'ensemble

$$D_m = \left\{ \frac{k}{2^m} ; 0 \leq k \leq 2^m \right\}$$

est fini. Comme

$$D = \bigcup_{m \geq 0} D_m,$$

l'ensemble D est dénombrable. Tout singleton est de mesure de Lebesgue nulle, donc toute réunion dénombrable de singletons l'est également :

$$\boxed{\lambda(D) = 0.}$$

Sur $X = [0, 1] \setminus D$, le développement binaire est unique. Retirer ou ajouter D à un ensemble ne change pas sa mesure ; une assertion qui échoue éventuellement seulement sur D reste donc vraie presque partout sur $[0, 1]$.

II Le décalage binaire

3

(a) Pour $x \in X$,

$$2x = \varepsilon_1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{2^n}.$$

La somme restante appartient à $[0, 1)$: si elle valait 1, tous les chiffres à partir de ε_2 seraient égaux à 1 et x serait dyadique. On a donc

$$\lfloor 2x \rfloor = \varepsilon_1,$$

puis

$$T(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{2^n}.$$

La transformation T supprime le premier chiffre. Par récurrence,

$$\boxed{T^m(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_{m+n}}{2^n}.$$

(b) Le mot w occupe les positions $m + 1, \dots, m + r$ de x si et seulement si les r premiers chiffres de $T^m(x)$ sont w . Remarquons que $T^m(x)$ est encore non dyadique : si $T^m(x)$ était dyadique, la relation

$$x = \frac{1}{2^m} \left(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j 2^{m-j} + T^m(x) \right)$$

montrerait que x est lui-même dyadique. On a donc $T^m(x) \in X$. D'après la question 1(b), les r premiers chiffres de $T^m(x)$ sont w si et seulement si $T^m(x) \in I(w)$. Ainsi

$$A_m(w) = X \cap (T^m)^{-1}(I(w)).$$

(c) Fixons les m premiers chiffres de x . Il existe 2^m mots possibles

$$v \in \{0, 1\}^m.$$

Pour un tel v , imposer ensuite le mot w revient à imposer le préfixe concaténé vw de longueur $m + r$. Par la première partie,

$$\{x \in X : \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m = v, \varepsilon_{m+1} \dots \varepsilon_{m+r} = w\} = I(vw) \cap X.$$

Les 2^m intervalles $I(vw)$ sont deux à deux disjoints et ont chacun la longueur $2^{-(m+r)}$. Retirer D ne change pas leur mesure. Par additivité,

$$\lambda(A_m(w)) = 2^m 2^{-(m+r)} = 2^{-r}.$$

Donc

$$\lambda(A_m(w)) = 2^{-r}.$$

Ce calcul ne fait intervenir ni indépendance probabiliste ni invariance préalable de λ par T .

III Éviter un mot sur des blocs disjoints

4

(a) La donnée successive des blocs

$$v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$$

détermine un unique mot binaire U de longueur Nr , obtenu par concaténation. L'ensemble recherché est donc

$$I(U) \cap X.$$

Il diffère de l'intervalle dyadique $I(U)$ seulement par l'ensemble négligeable D , et

$$\lambda(I(U) \cap X) = 2^{-Nr}.$$

(b) À chaque emplacement de bloc, il existe 2^r mots binaires possibles, dont un seul est interdit : w . Il reste donc $2^r - 1$ choix pour chacun des N blocs. Le nombre de suites admissibles est

$$(2^r - 1)^N.$$

Chaque suite admissible correspond, d'après (a), à un intervalle dyadique de longueur 2^{-Nr} , et ces intervalles sont disjoints. Ainsi

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcap_{j=0}^{N-1}(X \setminus E_j)\right) &= (2^r - 1)^N 2^{-Nr} \\ &= \left(\frac{2^r - 1}{2^r}\right)^N.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lambda\left(\bigcap_{j=0}^{N-1}(X \setminus E_j)\right) = (1 - 2^{-r})^N.$$

(c) Dans $F_{q,N}$, les q premiers blocs, c'est-à-dire les qr premiers chiffres, sont libres. Ils donnent

$$2^{qr}$$

choix possibles. Les N blocs suivants doivent tous être différents de w , d'où

$$(2^r - 1)^N$$

choix. Au total, $F_{q,N}$ est, à D près, la réunion disjointe de

$$2^{qr}(2^r - 1)^N$$

intervalles dyadiques de longueur

$$2^{-(q+N)r}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\lambda(F_{q,N}) &= 2^{qr}(2^r - 1)^N 2^{-(q+N)r} \\ &= (2^r - 1)^N 2^{-Nr} \\ &= (1 - 2^{-r})^N.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $q \geq 0$,

$$\lambda(F_{q,N}) = (1 - 2^{-r})^N.$$

Le résultat ne dépend pas de q précisément parce que les qr premiers chiffres sont laissés entièrement libres.

IV Passer de « au moins une fois » à « une infinité de fois »

5

(a) Par définition,

$$F_{q,N} = \bigcap_{j=q}^{q+N-1} (X \setminus E_j)$$

est l'ensemble des réels pour lesquels w n'apparaît dans aucun des blocs numérotés $q, q+1, \dots, q+N-1$. En intersectant sur tous les $N \geq 1$, on impose l'absence de w dans chaque bloc d'indice $j \geq q$. Ainsi

$$F_q = \{x \in X : x \notin E_j \text{ pour tout } j \geq q\}.$$

(b) Pour q fixé, la suite $(F_{q,N})_{N \geq 1}$ est décroissante et

$$F_q = \bigcap_{N \geq 1} F_{q,N}.$$

De plus, $\lambda(F_{q,1}) \leq 1$. La continuité décroissante de la mesure donne

$$\lambda(F_q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(F_{q,N}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - 2^{-r})^N.$$

Comme $0 < 1 - 2^{-r} < 1$,

$$\lambda(F_q) = 0.$$

6

(a) Si $x \in B_w$, l'ensemble des indices $j \geq 0$ tels que $x \in E_j$ est fini. Il existe donc $q \geq 0$ tel que $x \notin E_j$ pour tout $j \geq q$; si cet ensemble d'indices est vide, on peut simplement prendre $q = 0$. Ainsi $x \in F_q$.

Réciproquement, si $x \in F_q$, le mot w n'apparaît dans aucun des blocs de positions $jr + 1, \dots, jr + r$ pour $j \geq q$. Il ne peut donc apparaître que parmi les q blocs d'indices $0, \dots, q - 1$, donc un nombre fini de fois. Ainsi

$$B_w = \bigcup_{q \geq 0} F_q.$$

(b) Chaque F_q est négligeable. Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables étant négligeable,

$$\lambda(B_w) = 0.$$

Pour tout $x \in X \setminus B_w$, le mot w apparaît donc dans une infinité de blocs disjoints de positions $jr + 1, \dots, jr + r$. Il apparaît a fortiori une infinité de fois dans le développement binaire de x , sans restriction sur la position de départ.

En réintroduisant l'ensemble dyadique D , lui-même négligeable, on obtient

$$\text{pour presque tout } x \in [0, 1], \text{ le mot fixé } w \text{ apparaît une infinité de fois.}$$

Le passage par les ensembles F_q est essentiel : faire seulement tendre

$$(1 - 2^{-r})^N$$

vers 0 pour les N premiers blocs établirait que presque tout réel rencontre w au moins une fois dans ces blocs. En recommençant après tout rang q , on exclut au contraire la possibilité que les occurrences finissent par s'arrêter.

V Tous les mots à la fois

7

(a) Pour chaque $r \geq 1$, l'ensemble $\{0, 1\}^r$ contient exactement 2^r éléments ; il est donc fini. Or

$$\mathcal{W} = \bigcup_{r \geq 1} \{0, 1\}^r$$

est une réunion dénombrable d'ensembles finis. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{W} \text{ est dénombrable.}}$$

(b) Pour chaque mot $w \in \mathcal{W}$, on a montré que $\lambda(B_w) = 0$. Comme $\mathcal{W}$ est dénombrable,

$$\lambda\left(\bigcup_{w \in \mathcal{W}} B_w\right) = 0.$$

En ajoutant D , qui est également négligeable,

$$\boxed{\lambda\left(D \cup \bigcup_{w \in \mathcal{W}} B_w\right) = 0.}$$

(c) Soit

$$x \in [0, 1] \setminus \left(D \cup \bigcup_{w \in \mathcal{W}} B_w\right).$$

Le réel x n'est pas dyadique, donc son développement binaire est unique. De plus, pour tout mot binaire fini w , on a $x \notin B_w$; le mot w apparaît donc une infinité de fois dans ce développement. Le complément de cet ensemble de réels est négligeable. Finalement,

$$\boxed{\text{pour presque tout réel } x \in [0, 1], \text{ chaque mot binaire fini apparaît une infinité de fois.}}$$

Ouverture — ce que la normalité demanderait en plus

La conclusion précédente porte uniquement sur l'existence d'une infinité d'occurrences. La normalité en base 2 impose une information quantitative supplémentaire : si w a longueur r , alors la proportion des positions de départ occupées par w doit converger vers 2^{-r} .

Ainsi,

$$\text{normalité en base 2} \implies \text{chaque mot fini apparaît une infinité de fois,}$$

mais l'argument précédent n'établit aucune convergence de fréquence. Il ne constitue donc pas une démonstration de la normalité presque partout.