

DM n°04 — Que cachent les chiffres d'un réel typique ?

Mesure de Lebesgue · Intervalles
dyadiques · Développement binaire
· Ensembles négligeables

Écrire un réel en base 2 transforme un point de $[0, 1]$ en une suite de 0 et de 1. Mais que peut imposer la mesure de Lebesgue à cette suite ? Nous allons traduire des contraintes sur les chiffres en unions d'intervalles dyadiques, puis mesurer les réels qui évitent un motif donné. L'objectif est de faire apparaître une propriété très forte des développements binaires qui est pourtant vraie pour presque tout réel.

Dans les quatre premières parties, on travaille sur $[0, 1)$. On admet que tout $x \in [0, 1)$ possède au moins un développement binaire

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{2^n}, \quad \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

La question de l'unicité sera traitée explicitement. On note λ la mesure de Lebesgue.

I Des préfixes aux intervalles dyadiques

Soit $u = u_1 \dots u_n$ un mot binaire de longueur n . On lui associe l'entier

$$k(u) = \sum_{j=1}^n u_j 2^{n-j}$$

et l'intervalle dyadique

$$I(u) = \left[\frac{k(u)}{2^n}, \frac{k(u) + 1}{2^n} \right[.$$

- 1 (a) Calculer $\lambda(I(u))$.
- (b) Soit $x \in [0, 1)$ un réel non dyadique, c'est-à-dire qui n'est pas de la forme $k/2^m$. Si

$$x = \sum_{j \geq 1} \frac{\varepsilon_j}{2^j},$$

montrer que

$$x \in I(u) \iff (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (u_1, \dots, u_n).$$

- 2 (a) Soit $x \in (0, 1)$ un dyadique. Montrer qu'il admet un développement binaire terminé par une infinité de 0, puis un second développement obtenu en remplaçant le dernier 1 de l'écriture terminée par 0 et en poursuivant par une infinité de 1.
- (b) Réciproquement, montrer qu'un réel de $(0, 1)$ possédant deux développements binaires distincts est dyadique.
- (c) On note

$$D = \left\{ \frac{k}{2^m}; m \geq 0, 0 \leq k \leq 2^m \right\} \cap [0, 1].$$

Montrer que D est négligeable. On posera désormais

$$X = [0, 1] \setminus D.$$

Expliquer pourquoi on peut étudier les chiffres binaires sur X sans modifier aucune conclusion valable presque partout sur $[0, 1]$.

II Le décalage binaire

On définit, pour $x \in [0, 1]$,

$$T(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor.$$

3 (a) Soit $x \in X$ et

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{2^n}.$$

Montrer que

$$T(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{2^n}.$$

En déduire l'effet de T^m sur les chiffres binaires.

(b) Fixons un mot binaire $w = w_1 \dots w_r$ de longueur $r \geq 1$. Pour $m \geq 0$, on note

$$A_m(w) = \{x \in X ; \varepsilon_{m+1} \dots \varepsilon_{m+r} = w\}.$$

Exprimer $A_m(w)$ à l'aide de T^m et de $I(w)$.

(c) Sans invoquer d'argument probabiliste ni de propriété d'invariance de la mesure par T , montrer directement que

$$\lambda(A_m(w)) = 2^{-r}.$$

On pourra décomposer $A_m(w)$, à un ensemble négligeable près, en intervalles dyadiques de longueur $2^{-(m+r)}$.

III Éviter un mot sur des blocs disjoints

Le mot w de longueur r reste fixé. Pour $j \geq 0$, on pose

$$E_j = A_{jr}(w).$$

Ainsi, E_j est l'ensemble des réels de X pour lesquels w occupe exactement les positions $jr + 1, \dots, jr + r$.

4 (a) Soient $v_0, \dots, v_{N-1}$ des mots binaires de longueur r . Montrer que l'ensemble des $x \in X$ dont les N premiers blocs successifs de longueur r sont

$$v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$$

est, à l'ensemble D près, un intervalle dyadique de longueur 2^{-Nr} .

(b) Combien existe-t-il de suites de N blocs de longueur r dont aucun bloc n'est égal à w ? En déduire

$$\lambda\left(\bigcap_{j=0}^{N-1} (X \setminus E_j)\right) = (1 - 2^{-r})^N.$$

(c) Pour $q \geq 0$ et $N \geq 1$, poser

$$F_{q,N} = \bigcap_{j=q}^{q+N-1} (X \setminus E_j).$$

Montrer, par un nouveau comptage d'intervalles dyadiques, que

$$\lambda(F_{q,N}) = (1 - 2^{-r})^N.$$

Le calcul doit faire apparaître le rôle des qr premiers chiffres, qui ne sont soumis à aucune contrainte.

IV Passer de « au moins une fois » à « une infinité de fois »

5 Pour $q \geq 0$, définir

$$F_q = \bigcap_{N \geq 1} F_{q,N}.$$

(a) Interpréter F_q en termes d'occurrences du mot w dans les blocs de positions $jr + 1, \dots, jr + r$, pour $j \geq q$.

(b) À l'aide de la continuité décroissante de la mesure de Lebesgue, montrer que

$$\lambda(F_q) = 0.$$

6 On note B_w l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels w n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans les blocs de positions $jr + 1, \dots, jr + r$, pour $j \geq 0$.

(a) Montrer que

$$B_w = \bigcup_{q \geq 0} F_q.$$

(b) En déduire que $\lambda(B_w) = 0$, puis que, pour presque tout $x \in [0, 1]$, le mot fixé w apparaît une infinité de fois dans le développement binaire de x .

V Tous les mots à la fois

7 On note

$$\mathcal{W} = \bigcup_{r \geq 1} \{0, 1\}^r$$

l'ensemble de tous les mots binaires finis.

(a) Montrer que $\mathcal{W}$ est dénombrable.

(b) Pour chaque $w \in \mathcal{W}$, soit B_w l'ensemble exceptionnel défini à la question 6. Montrer que

$$D \cup \bigcup_{w \in \mathcal{W}} B_w$$

est négligeable.

(c) Conclure que

pour presque tout réel $x \in [0, 1]$, chaque mot binaire fini apparaît une infinité de fois.

Ouverture — ce que la normalité demanderait en plus

Un réel est dit **normal en base 2** si, pour tout mot binaire w de longueur r , la fréquence des positions où w commence existe et vaut 2^{-r} . La propriété démontrée ici est plus faible : elle garantit une infinité d'occurrences de chaque mot, mais ne donne aucune information sur leur fréquence asymptotique.