

CORRIGÉ

L3 · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°05 — Un ensemble peut-il être grand sans contenir aucun intervalle ?

Mesure de Lebesgue · Ensembles boréliens · Ensembles de mesure nulle · Fonction de Cantor

I Un ensemble non dénombrable de mesure nulle

1

(a) Dans $C_0 = [0, 1]$, on supprime l'intervalle ouvert $]1/3, 2/3[$ et l'on conserve les deux tiers fermés :

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Au rang suivant, on applique exactement la même opération à chacun de ces deux intervalles. On obtient

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

(b) Pour $n = 0$, C_0 est un intervalle fermé de longueur $1 = 3^0$. Supposons que C_n soit la réunion de 2^n intervalles fermés disjoints, chacun de longueur 3^{-n} . Dans chacun d'eux, le retrait du tiers central ouvert laisse deux intervalles fermés, chacun de longueur $3^{-(n+1)}$. On obtient donc 2^{n+1} intervalles fermés disjoints. Par récurrence,

$$C_n \text{ est la réunion de } 2^n \text{ intervalles de longueur } 3^{-n}.$$

(c) Ces intervalles sont deux à deux disjoints. Par additivité finie de la mesure,

$$\lambda(C_n) = 2^n 3^{-n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

2

(a) Chaque C_n est une réunion finie d'intervalles fermés ; il est donc fermé, donc borélien. Une intersection quelconque de fermés est fermée. Ainsi

$$C = \bigcap_{n \geq 0} C_n \text{ est fermé, donc borélien.}$$

(b) La suite (C_n) est décroissante et $\lambda(C_0) = 1 < +\infty$. Par continuité de la mesure par décroissance,

$$\lambda(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Donc

$$\lambda(C) = 0.$$

(c) Si C contenait un intervalle I de longueur strictement positive, alors $\lambda(I) > 0$. Par monotonie de la mesure,

$$0 < \lambda(I) \leq \lambda(C) = 0,$$

ce qui est impossible. Ainsi C ne contient aucun intervalle de longueur strictement positive. En particulier, il ne contient aucun intervalle ouvert non vide ; d'après le rappel du sujet,

$$\text{Int}(C) = \emptyset.$$

3 _____

(a) Soit $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ et posons $a_k = 2\varepsilon_k \in \{0, 2\}$. Pour $n \geq 1$, définissons

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}.$$

Le mot ternaire $a_1 \dots a_n$, dont tous les chiffres valent 0 ou 2, repère l'un des intervalles conservés au rang n ; cet intervalle est

$$I_n = [s_n, s_n + 3^{-n}] \subset C_n.$$

Si

$$x = \Phi(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$

alors

$$0 \leq x - s_n = \sum_{k>n} \frac{a_k}{3^k} \leq \sum_{k>n} \frac{2}{3^k} = 3^{-n}.$$

Ainsi $x \in I_n \subset C_n$ pour tout n , donc

$$\Phi(\varepsilon) \in C.$$

(b) Soient ε et η deux suites distinctes, et soit m le premier indice tel que $\varepsilon_m \neq \eta_m$. Supposons par exemple $\varepsilon_m = 1$ et $\eta_m = 0$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) - \Phi(\eta) &= \frac{2}{3^m} + \sum_{k>m} \frac{2(\varepsilon_k - \eta_k)}{3^k} \\ &\geq \frac{2}{3^m} - 2 \sum_{k>m} \frac{1}{3^k} \\ &= \frac{2}{3^m} - \frac{1}{3^m} \\ &= \frac{1}{3^m} > 0. \end{aligned}$$

Les images sont donc différentes :

Φ est injective.

(c) Supposons $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dénombrable et écrivons ses éléments sous la forme

$$\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots, \quad \varepsilon^{(j)} = (\varepsilon_k^{(j)})_{k \geq 1}.$$

Définissons une nouvelle suite δ par

$$\delta_k = 1 - \varepsilon_k^{(k)}.$$

Pour chaque k , la suite δ diffère de $\varepsilon^{(k)}$ à l'indice k . Elle n'apparaît donc pas dans la liste, contradiction. Ainsi $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. Comme Φ est une injection de cet ensemble dans C ,

C n'est pas dénombrable.

(d) Soit $x \in C$. Pour chaque n , le point x appartient à un unique intervalle composant C_n . Comme ces intervalles sont emboîtés au fil de la construction, on peut noter $\varepsilon_n = 0$ lorsque, au rang n , x se trouve dans le morceau de gauche de l'intervalle précédent, et $\varepsilon_n = 1$ lorsqu'il se trouve dans le morceau de droite. Posons encore $a_n = 2\varepsilon_n$ et

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}.$$

L'intervalle de C_n qui contient x est alors

$$[s_n, s_n + 3^{-n}].$$

Par conséquent

$$0 \leq x - s_n \leq 3^{-n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = \Phi(\varepsilon).$$

Ainsi Φ est surjective sur C . Avec la question (b), elle est donc bijective entre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et C .

L'écriture ternaire de x utilisant seulement les chiffres 0 et 2 est donc unique : deux telles écritures donneraient deux suites binaires ayant la même image par Φ , ce que l'injectivité exclut.

Cela ne contredit pas l'ambiguïté habituelle des développements en base 3. Certains nombres ont bien deux écritures ternaires, par exemple

$$\frac{1}{3} = 0,1_3 = 0,02222\dots_3,$$

mais une seule de ces deux écritures n'utilise que les chiffres 0 et 2. Les éventuelles secondes écritures des points frontières de C font intervenir le chiffre 1.

Éclairage. La mesure nulle de C et sa non-dénombrabilité ne se contredisent pas : la mesure de Lebesgue ne compte pas les points. Elle quantifie une autre notion de taille.

II Épaissir Cantor sans créer d'intervalle

4

(a) Avant l'étape n , il y a 2^{n-1} intervalles fermés. On retire au centre de chacun d'eux un intervalle ouvert de longueur 4^{-n} . La longueur totale retirée à l'étape n vaut donc

$$2^{n-1}4^{-n} = 2^{n-1}2^{-2n} = \boxed{2^{-n-1}}.$$

(b) Après n étapes, la longueur totale retirée est

$$\sum_{j=1}^n 2^{-j-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Par conséquent

$$\lambda(K_n) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

(c) À chaque étape, tous les intervalles présents ont même longueur et subissent le même retrait central. Ainsi K_n est formé de 2^n intervalles fermés de même longueur ℓ_n . Comme ils sont disjoints,

$$2^n \ell_n = \lambda(K_n).$$

Donc

$$\ell_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

(d) À l'étape n , on veut retirer dans chaque intervalle composant K_{n-1} un intervalle de longueur $4^{-n} = 2^{-2n}$. D'après (c),

$$\ell_{n-1} = 2^{-n} + 2^{-2n+1}.$$

On a donc

$$\ell_{n-1} > 2^{-2n} = 4^{-n}.$$

L'intervalle ouvert centré de longueur 4^{-n} tient strictement à l'intérieur de chaque composante de K_{n-1} . La construction est donc bien définie à tout rang.

5

(a) Chaque K_n est fermé. Leur intersection K est donc fermée, et en particulier borélienne. La suite (K_n) est décroissante et $\lambda(K_0) = 1$. Par continuité de la mesure,

$$\lambda(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(b) Supposons qu'un intervalle I de longueur $L > 0$ soit contenu dans K . Alors $I \subset K_n$ pour tout n . Choisissons n assez grand pour que $\ell_n < L$. Comme K_n est réunion d'intervalles fermés disjoints séparés par des intervalles ouverts supprimés, un intervalle $I \subset K_n$ ne peut rencontrer deux composantes

distinctes : il contiendrait alors aussi des points du trou situé entre elles. Il doit donc être contenu dans une seule composante de K_n , ce qui imposerait $L \leq \ell_n$, contradiction.

Ainsi K ne contient aucun intervalle de longueur strictement positive. En particulier,

$$\text{Int}(K) = \emptyset.$$

(c) Les deux ensembles C et K sont fermés et d'intérieur vide. Pourtant

$$\lambda(C) = 0, \quad \lambda(K) = \frac{1}{2}.$$

L'absence d'intérieur ne force donc pas la mesure à être nulle. La petitesse topologique et la petitesse au sens de la mesure sont deux notions distinctes.

6

(a) À l'étape n , on retire 2^{n-1} intervalles, chacun de longueur

$$d_n = \frac{1 - \alpha}{2^{2n-1}}.$$

La longueur totale retirée vaut

$$2^{n-1}d_n = (1 - \alpha)2^{-n}.$$

Après n étapes, la longueur totale retirée est donc

$$(1 - \alpha) \sum_{j=1}^n 2^{-j} = (1 - \alpha)(1 - 2^{-n}).$$

Ainsi

$$\lambda(K_n^{(\alpha)}) = \alpha + (1 - \alpha)2^{-n}.$$

(b) Les 2^n intervalles composant $K_n^{(\alpha)}$ ont même longueur. Par conséquent

$$\ell_n^{(\alpha)} = \frac{\lambda(K_n^{(\alpha)})}{2^n} = \left[\frac{\alpha}{2^n} + \frac{1 - \alpha}{2^{2n}} \right].$$

Au rang suivant, la longueur à retirer dans chacune de ces composantes est

$$d_{n+1} = \frac{1 - \alpha}{2^{2n+1}}.$$

Or

$$\ell_n^{(\alpha)} - d_{n+1} = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{1 - \alpha}{2^{2n+1}} > 0.$$

L'intervalle central à retirer est donc toujours strictement plus court que la composante dans laquelle on le place : la construction est bien définie à tout rang.

(c) Comme intersection de fermés, $K^{(\alpha)}$ est fermé. Par continuité de la mesure,

$$\lambda(K^{(\alpha)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha + (1 - \alpha)2^{-n}) = \boxed{\alpha}.$$

De plus

$$\ell_n^{(\alpha)} = \alpha 2^{-n} + (1 - \alpha) 2^{-2n} \longrightarrow 0.$$

Si un intervalle de longueur $L > 0$ était contenu dans $K^{(\alpha)}$, il serait contenu dans $K_n^{(\alpha)}$ pour tout n . Pour n assez grand, on aurait $\ell_n^{(\alpha)} < L$, ce qui est impossible par le même argument qu'en 5(b). Ainsi

$$\text{Int}(K^{(\alpha)}) = \emptyset.$$

On a donc construit, pour tout $\alpha \in [0, 1[$, un fermé d'intérieur vide de mesure exactement α .

(d) Soit $E \subset [0, 1]$ fermé et supposons $\lambda(E) = 1$. Son complémentaire relatif

$$U = [0, 1] \setminus E$$

est ouvert dans $[0, 1]$ et vérifie $\lambda(U) = 0$. S'il était non vide, il contiendrait un intervalle relatif de longueur strictement positive, donc un ensemble de mesure strictement positive, contradiction. Ainsi $U = \emptyset$, donc

$$E = [0, 1].$$

Son intérieur dans $\mathbb{R}$ est $]0, 1[$, donc il n'est pas vide. La valeur $\alpha = 1$ ne peut donc pas fournir un fermé d'intérieur vide de même nature.

III Une fonction qui monte sans pente presque partout

7

Pour $n = 0$, $F_0(x) = x$ est continue, croissante, avec $F_0(0) = 0$ et $F_0(1) = 1$.

Supposons ces propriétés vraies pour F_n . Sur $[0, 1/3]$, la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{2} F_n(3x)$$

est continue et croissante ; il en va de même sur $[2/3, 1]$ pour

$$x \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F_n(3x - 2).$$

Sur $[1/3, 2/3]$, F_{n+1} est constante égale à $1/2$. Aux points de raccord,

$$\frac{1}{2} F_n(1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F_n(0) = \frac{1}{2}.$$

Il n'y a donc pas de discontinuité. Les valeurs sur les trois morceaux sont ordonnées, ce qui conserve la croissance. Enfin

$$F_{n+1}(0) = \frac{1}{2} F_n(0) = 0, \quad F_{n+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F_n(1) = 1.$$

Par récurrence,

$$F_n \text{ est continue, croissante, } F_n(0) = 0, F_n(1) = 1.$$

8

(a) Sur $[0, 1/3]$,

$$F_1(x) = \frac{3}{2}x,$$

donc $F_1(x) - F_0(x) = x/2$, dont le maximum vaut $1/6$. Sur $[1/3, 2/3]$,

$$F_1(x) = \frac{1}{2},$$

et le maximum de $|1/2 - x|$ vaut encore $1/6$. Le dernier tiers est symétrique. Ainsi

$$\|F_1 - F_0\|_\infty = \frac{1}{6}.$$

(b) Pour $n \geq 1$, les deux fonctions F_n et F_{n-1} valent $1/2$ sur $[1/3, 2/3]$. Sur le premier tiers,

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| = \frac{1}{2}|F_n(3x) - F_{n-1}(3x)|,$$

et, lorsque x parcourt $[0, 1/3]$, $3x$ parcourt $[0, 1]$. Le même calcul vaut sur le dernier tiers. On obtient donc

$$\|F_{n+1} - F_n\|_\infty = \frac{1}{2}\|F_n - F_{n-1}\|_\infty.$$

(c) Par récurrence à partir de (a),

$$\|F_{n+1} - F_n\|_\infty = \frac{1}{6 \cdot 2^n}.$$

Pour $p > n$,

$$\|F_p - F_n\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{p-1} \|F_{k+1} - F_k\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{6 \cdot 2^k} = \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

Le membre de droite tend vers 0 indépendamment de p : la suite (F_n) est donc uniformément de Cauchy. En particulier, pour chaque $x \in [0, 1]$, la suite réelle $(F_n(x))$ est de Cauchy ; la complétude de $\mathbb{R}$ permet de définir

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x).$$

En faisant tendre p vers l'infini dans l'estimation précédente, pour n fixé, on obtient

$$\|F - F_n\|_\infty \leq \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

Ainsi

$$F_n \longrightarrow F \text{ uniformément sur } [0, 1].$$

9

Une limite uniforme de fonctions continues est continue ; donc F est continue. Pour $x \leq y$, on a $F_n(x) \leq F_n(y)$ pour tout n ; en passant à la limite,

$$F(x) \leq F(y),$$

donc F est croissante. Enfin

$$F(0) = \lim_n F_n(0) = 0, \quad F(1) = \lim_n F_n(1) = 1.$$

Elle n'est donc pas constante. Ainsi

$$F \text{ est continue, croissante, non constante, } F(0) = 0, F(1) = 1.$$

10

(a) Pour $n = 1$, F_1 est constante sur l'intervalle supprimé $]1/3, 2/3[$. Supposons que F_n soit constante sur tous les intervalles supprimés pendant les n premières étapes. La définition de F_{n+1} reproduit dans le premier et le dernier tiers une copie verticale réduite de F_n , tandis qu'elle crée le nouveau plateau $[1/3, 2/3]$. Après changement d'échelle, les anciens plateaux réapparaissent dans chacun des deux tiers conservés. Ainsi F_{n+1} est constante sur tous les intervalles supprimés pendant les $n + 1$ premières étapes.

De plus, une fois qu'un intervalle a été supprimé au cours de la construction de C , toutes les fonctions F_m de rang ultérieur y gardent la même valeur constante.

(b) Si $x \notin C = \bigcap_n C_n$, il existe N tel que $x \notin C_N$. Le complémentaire $[0, 1] \setminus C_N$ est exactement la réunion des intervalles ouverts supprimés pendant les N premières étapes. Le point x appartient donc à l'un de ces intervalles, noté J . D'après (a), toutes les fonctions F_m pour $m \geq N$ prennent sur J une même valeur constante. En passant à la limite, F est elle aussi constante sur J .

(c) Tout point de $[0, 1] \setminus C$ appartient donc à un intervalle ouvert sur lequel F est constante. La fonction F y est dérivable et

$$F'(x) = 0.$$

Or $\lambda(C) = 0$. L'ensemble des points où cette démonstration n'établit pas $F'(x) = 0$ est contenu dans C , donc dans un ensemble de mesure nulle. Par définition,

$$F'(x) = 0 \quad \text{presque partout sur } [0, 1].$$

Cette conclusion n'affirme ni que F est dérivable en tout point de C , ni que sa dérivée y vaudrait nécessairement 0 lorsqu'elle existe. Pour conclure à une propriété presque partout, il suffit que l'ensemble des points non traités soit de mesure nulle.

Éclairage. Toute la variation globale de F est compatible avec une dérivée nulle sur le complémentaire de C , car ce complémentaire ne contient pas les points exceptionnels où se concentre le phénomène.

11

(a) La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle. Pour un x fixé dans l'un des trois tiers, on peut donc faire tendre n vers l'infini dans la relation définissant $F_{n+1}(x)$. On obtient

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F(3x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(b) Posons $b_k = a_k/2 \in \{0, 1\}$. Si le premier chiffre ternaire de x vaut 0, la première relation donne un facteur $1/2$ et décale le développement ternaire. S'il vaut 2, la troisième relation ajoute $1/2$, puis applique le même mécanisme à la suite des chiffres.

Après n itérations, on obtient

$$F(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} F(x_n),$$

où $x_n \in [0, 1]$. Comme F est croissante avec $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$, on a $0 \leq F \leq 1$. Le reste est donc compris entre 0 et 2^{-n} et tend vers 0. Ainsi

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k/2}{2^k}.$$

La fonction de Cantor remplace donc les chiffres ternaires 0, 2 par les chiffres binaires 0, 1.

(c) On a déjà $F(C) \subset [0, 1]$. Réciproquement, soit $y \in [0, 1]$. Choisissons un développement binaire

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}, \quad b_k \in \{0, 1\}.$$

Posons

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2b_k}{3^k}.$$

D'après la question 3(a), $x \in C$, et la formule de (b) donne $F(x) = y$. Donc

$$F(C) = [0, 1].$$

Ainsi une fonction continue peut envoyer un ensemble de mesure nulle sur un intervalle entier.

(d) Les constructions séparent plusieurs notions de taille :

- C n'est pas dénombrable, bien que $\lambda(C) = 0$;
- C et K sont tous deux fermés d'intérieur vide, mais $\lambda(C) = 0$ tandis que $\lambda(K) = 1/2$;
- plus généralement, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on a construit un fermé d'intérieur vide de mesure α .

Pour la fonction, F est continue et croissante, elle passe de 0 à 1, et pourtant sa dérivée vaut 0 presque partout. Il n'y a pas de contradiction avec le théorème des accroissements finis : pour déduire d'une dérivée identiquement nulle qu'une fonction est constante, il faut qu'elle soit dérivable en tout point de l'intervalle ouvert considéré. Ici, on a seulement établi la dérivabilité et la nullité de la dérivée hors de C ; l'ensemble exceptionnel C , bien que de mesure nulle, empêche d'appliquer ce raisonnement sur tout $[0, 1]$.