

DM n°05 — Un ensemble peut-il être grand sans contenir aucun intervalle ?

Mesure de Lebesgue · Ensembles boréliens · Ensembles de mesure nulle · Fonction de Cantor

Sur la droite réelle, dire qu'un ensemble est « grand » peut signifier plusieurs choses : avoir beaucoup de points, contenir un intervalle, ou encore avoir une grande mesure. Ces trois idées coïncident pour les exemples les plus simples, mais elles finissent par se séparer de façon spectaculaire. On va partir d'une construction très mince, l'épaissir sans jamais créer d'intervalle, puis faire apparaître une fonction continue qui varie tout en ayant une dérivée nulle presque partout.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser la continuité par décroissance : si (A_n) est une suite décroissante d'ensembles mesurables et si $\lambda(A_0) < +\infty$, alors

$$\lambda\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n).$$

On rappelle qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ a un **intérieur vide** s'il ne contient aucun intervalle ouvert de longueur strictement positive.

I Un ensemble non dénombrable de mesure nulle

On pose $C_0 = [0, 1]$. Supposons C_{n-1} déjà construit comme réunion finie d'intervalles fermés disjoints. Dans chacun de ces intervalles $[a, b]$, on supprime l'intervalle ouvert

$$\left] a + \frac{b-a}{3}, a + \frac{2(b-a)}{3} \right[$$

et l'on conserve les deux intervalles fermés

$$\left[a, a + \frac{b-a}{3} \right] \quad \text{et} \quad \left[a + \frac{2(b-a)}{3}, b \right].$$

L'union de tous les intervalles ainsi conservés est notée C_n . Autrement dit, dans chaque intervalle présent au rang précédent, on retire son tiers central ouvert. On définit enfin

$$C = \bigcap_{n \geq 0} C_n.$$

- 1 (a) Décrire C_1 et C_2 .
- (b) Montrer que C_n est la réunion de 2^n intervalles fermés disjoints, chacun de longueur 3^{-n} .
- (c) En déduire $\lambda(C_n)$.
- 2 (a) Montrer que C est fermé dans $\mathbb{R}$, donc borélien.
- (b) Calculer $\lambda(C)$.
- (c) Montrer que C ne contient aucun intervalle de longueur strictement positive. Qu'en déduire sur son intérieur ?

La mesure vient de déclarer C « négligeable ». Cela ne dit pourtant presque rien sur son nombre de points.

- 3 On note $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ dont chaque terme vaut 0 ou 1. À une telle suite, on associe les chiffres

$$a_k = 2 \cdot \varepsilon_k \in \{0, 2\}$$

et l'on définit

$$\Phi(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

Ainsi le chiffre binaire 0 est codé par le chiffre ternaire 0, et le chiffre binaire 1 par le chiffre ternaire 2.

- (a) Montrer que $\Phi(\varepsilon) \in C$ pour toute suite $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
- (b) Montrer que Φ est injective. On pourra considérer le premier indice auquel deux suites diffèrent.
- (c) Montrer, par un argument diagonal, que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. En déduire que C n'est pas dénombrable.
- (d) Montrer réciproquement que tout $x \in C$ s'écrit sous la forme $x = \Phi(\varepsilon)$ pour une suite $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. En déduire que chaque point de C possède une unique écriture ternaire n'utilisant que les chiffres 0 et 2. Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le fait que certains réels possèdent deux développements ternaires.

II Épaissir Cantor sans créer d'intervalle

On reprend le même principe de construction, mais on retire des intervalles beaucoup plus courts. On pose $K_0 = [0, 1]$. Pour $n \geq 1$, supposons K_{n-1} écrit comme réunion de 2^{n-1} intervalles fermés disjoints. Dans chacun d'eux, noté $[a, b]$, on veut supprimer l'intervalle ouvert centré au milieu de $[a, b]$ et de longueur 4^{-n} , c'est-à-dire

$$\left] \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4^n}, \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4^n} \right[.$$

On conserve les deux intervalles fermés situés de part et d'autre ; leur union, pour tous les intervalles $[a, b]$ du rang précédent, est notée K_n . La question 4(d) permettra de vérifier que l'intervalle que l'on veut retirer tient bien à l'intérieur de chacun des intervalles présents, à tout rang.

Par exemple, au premier rang on retire l'intervalle ouvert de longueur $1/4$ centré en $1/2$, donc

$$K_1 = \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right].$$

On pose enfin

$$K = \bigcap_{n \geq 0} K_n.$$

- 4 (a) À l'étape n , combien d'intervalles sont retirés ? Quelle est leur longueur totale ?
- (b) Montrer que

$$\lambda(K_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

- (c) Montrer que K_n est la réunion de 2^n intervalles fermés de même longueur ℓ_n , et déterminer ℓ_n .

(d) Vérifier que, pour tout $n \geq 1$, l'intervalle de longueur 4^{-n} que l'on veut retirer est strictement plus court que chaque intervalle composant K_{n-1} . Conclure que la construction est bien définie à toutes les étapes.

5 (a) Montrer que K est fermé et calculer exactement $\lambda(K)$.

(b) Montrer que K ne contient aucun intervalle de longueur strictement positive. En déduire que son intérieur est vide.

(c) Comparer les propriétés obtenues pour C et K . Que montrent-elles sur le lien entre mesure et intérieur topologique ?

Le choix de la mesure $1/2$ n'a rien de particulier. On peut régler l'épaisseur finale de la même manière.

6 Soit $\alpha \in [0, 1[$. On pose $K_0^{(\alpha)} = [0, 1]$. Pour $n \geq 1$, supposons $K_{n-1}^{(\alpha)}$ construit comme réunion de 2^{n-1} intervalles fermés disjoints. Au centre de chacun d'eux, on retire un intervalle ouvert de longueur

$$d_n = \frac{1 - \alpha}{2^{2n-1}}.$$

On note $K_n^{(\alpha)}$ le fermé obtenu après n étapes et

$$K^{(\alpha)} = \bigcap_{n \geq 0} K_n^{(\alpha)}.$$

(a) Calculer la longueur totale retirée à l'étape n , puis $\lambda(K_n^{(\alpha)})$.

(b) Montrer que chacun des 2^n intervalles composant $K_n^{(\alpha)}$ a pour longueur

$$\ell_n^{(\alpha)} = \frac{\alpha}{2^n} + \frac{1 - \alpha}{2^{2n}}.$$

Vérifier que l'intervalle que l'on souhaite retirer au rang suivant est toujours strictement plus court que ces intervalles.

(c) Montrer que $K^{(\alpha)}$ est fermé, d'intérieur vide et de mesure α .

(d) Montrer qu'un fermé $E \subset [0, 1]$ de mesure 1 est nécessairement égal à $[0, 1]$. Pourquoi la valeur $\alpha = 1$ ne peut-elle donc pas fournir un exemple de même nature ?

III Une fonction qui monte sans pente presque partout

On revient à l'ensemble triadique C . On définit une suite de fonctions (F_n) sur $[0, 1]$ par $F_0(x) = x$ et, pour $n \geq 0$,

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_n(3x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F_n(3x - 2), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les trois expressions coïncident aux points de raccord $1/3$ et $2/3$ dès que $F_n(0) = 0$ et $F_n(1) = 1$.

7 Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, la fonction F_n est continue, croissante et vérifie

$$F_n(0) = 0, \quad F_n(1) = 1.$$

8 On note $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$.

(a) Calculer $\|F_1 - F_0\|_\infty$.

(b) Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$\|F_{n+1} - F_n\|_\infty = \frac{1}{2} \|F_n - F_{n-1}\|_\infty.$$

(c) Montrer que (F_n) est uniformément de Cauchy sur $[0, 1]$. En déduire, en utilisant la complétude de $\mathbb{R}$, qu'elle converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction F .

9 Montrer que F est continue, croissante, non constante, et que

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1.$$

Cette fonction est appelée **fonction de Cantor**.

10 (a) Montrer par récurrence que F_n est constante sur chacun des intervalles ouverts supprimés pendant les n premières étapes de la construction de C .

(b) Soit $x \in [0, 1] \setminus C$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert contenant x sur lequel F est constante.

(c) En déduire que F est dérivable en tout point de $[0, 1] \setminus C$ et que sa dérivée y vaut 0. Conclure que

$$F'(x) = 0 \quad \text{presque partout sur } [0, 1].$$

Préciser exactement ce que cette démonstration affirme, et ce qu'elle n'affirme pas, aux points de C .

11 Soit $x \in C$. D'après la question 3(d), il possède un unique codage ternaire utilisant seulement les chiffres 0 et 2 :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \quad a_k \in \{0, 2\}.$$

(a) En passant à la limite dans la définition de F_{n+1} , établir les relations fonctionnelles satisfaites par F sur les trois tiers de $[0, 1]$.

(b) En déduire

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k/2}{2^k}.$$

Interpréter cette formule comme un passage d'un codage ternaire à un codage binaire.

(c) Montrer que

$$F(C) = [0, 1].$$

(d) Résumer en quelques lignes les trois contrastes mis en évidence dans le problème : cardinalité, topologie et mesure pour les ensembles C et K , puis variation et dérivée pour la fonction F . Pourquoi le théorème des accroissements finis ne permet-il pas de conclure que F est constante ?