CORRIGÉ

L3 · CORRIGÉ

Sur la possibilité de diviser par zéro

CHAPITRES

Wheels et division totale · Relations d'équivalence et quotients · Anneaux et corps de fractions · Localisation · Droite projective · Morphismes et propriétés universelles

I Repartir de la construction des fractions

1

Pour tout $(a,b) \in A \times S$, on a $ab = ba$, donc $(a,b) \sim (a,b)$: la relation est réflexive. Elle est manifestement symétrique.

Pour la transitivité, supposons

$$(a,b) \sim (c,d), \qquad (c,d) \sim (e,f).$$

Alors

$$ad = bc, \qquad cf = de.$$

En multipliant la première égalité par f et la seconde par b, on obtient

$$adf = bcf = bde.$$

Comme $d \in S$, on a $d \neq 0$; l'intégrité de A permet de simplifier par d, d'où $af = be$. Ainsi $(a,b) \sim (e,f)$ et $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

Pour vérifier la bonne définition des opérations, supposons

$$(a,b) \sim (a',b'), \qquad (c,d) \sim (c',d').$$

On a donc

$$ab' = a'b, \qquad cd' = c'd.$$

Pour l'addition,

$$\begin{aligned}(ad+bc)b'd' &= ab'dd' + bb'cd' \\ &= a'bdd' + bb'c'd \\ &= (a'd' + b'c')bd.\end{aligned}$$

Les deux représentants proposés pour la somme sont donc équivalents. Pour le produit,

$$(ac)b'd' = ab'cd' = a'bc'd = (a'c')bd,$$

ce qui donne également l'équivalence voulue. Les deux opérations sont bien définies sur le quotient.

2

Supposons $a/b = c/d$ dans K. Alors $ad = bc$, donc

$$f(a)f(d) = f(b)f(c).$$

Comme $f(b)$ et $f(d)$ sont inversibles,

$$f(a)f(b)^{-1} = f(c)f(d)^{-1}.$$

La formule de l'énoncé ne dépend donc pas du représentant.

Les identités

$$\widetilde{f}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = f(ad+bc)f(bd)^{-1} = f(a)f(b)^{-1} + f(c)f(d)^{-1}$$

et

$$\widetilde{f}\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right) = f(ac)f(bd)^{-1} = \widetilde{f}\left(\frac{a}{b}\right)\widetilde{f}\left(\frac{c}{d}\right)$$

montrent que $\widetilde{f}$ est un morphisme d'anneaux. De plus,

$$\widetilde{f}\left(\frac{a}{1}\right) = f(a)f(1)^{-1} = f(a).$$

Soit maintenant $g : K \to B$ un morphisme d'anneaux tel que $g(a/1) = f(a)$ pour tout $a \in A$. Pour $b \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{1}\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}.$$

Comme un morphisme d'anneaux envoie un élément inversible sur un élément inversible et préserve son inverse,

$$g\left(\frac{a}{b}\right) = f(a)f(b)^{-1}.$$

Ainsi $g = \widetilde{f}$. La factorisation est unique.

IDÉE C'est la propriété universelle usuelle du corps des fractions : le quotient est caractérisé par la possibilité, et l'unicité, de prolonger tout morphisme qui rend les dénominateurs inversibles.

3

Sur A^2, la relation définie par $ad = bc$ donne

$$(1,0) \sim (0,0)$$

car $1 \cdot 0 = 0 \cdot 0$, et

$$(0,0) \sim (0,1)$$

car $0 \cdot 1 = 0 \cdot 0$.

En revanche,

$$1 \cdot 1 \neq 0 \cdot 0$$

puisque A est non nul. Donc $(1,0)$ n'est pas relié à $(0,1)$.

La transitivité échoue. Le couple $(0,0)$ est précisément le point qui relie artificiellement des couples qui ne devraient pas être identifiés : lorsqu'il est autorisé, l'égalité croisée $ad = bc$ n'est plus une relation d'équivalence.

II Un quotient qui accepte le dénominateur nul

4

Pour tout $(a,b) \in A^2$,

$$1(a,b) = 1(a,b),$$

avec $1 \in S$, donc $(a,b) \approx (a,b)$.

La symétrie est immédiate : si $s(a,b) = t(c,d)$, alors $t(c,d) = s(a,b)$.

Pour la transitivité, supposons

$$s(a,b) = t(c,d), \qquad u(c,d) = v(e,f),$$

avec $s,t,u,v \in S$. Alors

$$us(a,b) = ut(c,d) = tv(e,f).$$

Comme A est intègre, us et tv sont encore non nuls, donc appartiennent à S. Ainsi $(a,b) \approx (e,f)$. La relation $\approx$ est une relation d'équivalence.

5

Supposons d'abord $b,d \in S$ et $(a,b) \approx (c,d)$. Il existe $s,t \in S$ tels que

$$sa = tc, \qquad sb = td.$$

Alors

$$sad = tcd,$$

et, en multipliant $sb = td$ par c,

$$sbc = tcd.$$

D'où $s(ad - bc) = 0$. Comme $s \neq 0$ et A est intègre,

$$ad = bc.$$

Réciproquement, si $ad = bc$, alors

$$d(a,b) = (da, db) = (bc, bd) = b(c,d),$$

avec $b,d \in S$. Ainsi $(a,b) \approx (c,d)$.

Pour la classe du couple nul, si $(a,b) \approx (0,0)$, il existe $s,t \in S$ tels que

$$s(a,b) = t(0,0) = (0,0).$$

Donc $sa = sb = 0$. L'intégrité et $s \neq 0$ imposent $a = b = 0$. La classe de $(0,0)$ est donc le singleton $\{(0,0)\}$.

Enfin, les quatre éléments $\perp, 0, 1, \infty$ sont distincts. Par exemple, si $[0,1] = [1,1]$, il existerait $s, t \in S$ tels que $(0,s) = (t,t)$, donc $t = 0$, impossible. Si $[1,0] = [1,1]$, on aurait $(s,0) = (t,t)$ et donc $t = 0$. Si $[0,1] = [1,0]$, on aurait $(0,s) = (t,0)$ et donc $s = t = 0$. La classe $\perp$ ne peut coïncider avec aucune des trois autres puisque sa classe est réduite au couple nul, alors que $(0,1)$, $(1,1)$ et $(1,0)$ sont non nuls.

6

Si $[a,b] = [c,d]$, il existe $s, t \in S$ tels que

$$s(a,b) = t(c,d).$$

En échangeant les coordonnées,

$$s(b,a) = t(d,c),$$

ce qui montre $[b,a] = [d,c]$. L'application ι est bien définie.

Pour tout $[a,b] \in W(A)$,

$$(\iota \circ \iota)([a,b]) = \iota([b,a]) = [a,b].$$

Donc $\iota^2 = \mathrm{id}_{W(A)}$. Enfin,

$$\iota(0) = \iota([0,1]) = [1,0] = \infty,$$
$$\iota(\infty) = 0,$$

et

$$\iota(\perp) = \perp.$$

IDÉE L'inversion n'est pas ajoutée après coup : elle est déjà présente dans la symétrie des coordonnées du quotient.

III Une droite projective, et un point de plus

7

Si $[a,b] = [c,d]$ dans $W(A) \setminus \{\perp\}$, il existe $s, t \in S$ tels que

$$s(a,b) = t(c,d).$$

Dans K, cela donne

$$(c,d) = \frac{s}{t}(a,b),$$

avec $s/t \in K^*$. Les deux couples définissent donc le même point projectif. Ainsi Θ est bien définie.

Supposons maintenant

$$\Theta([a,b]) = \Theta([c,d]).$$

Il existe $\lambda \in K^*$ tel que

$$(c,d) = \lambda(a,b).$$

Écrivons $\lambda = p/q$ avec $p, q \in S$. Alors

$$q(c,d) = p(a,b),$$

ce qui est exactement la relation $(a,b) \approx (c,d)$. Donc $[a,b] = [c,d]$ et Θ est injective.

Enfin, soit $[x : y] \in \mathbf{P}^1(K)$. Écrivons

$$x = \frac{a}{s}, \qquad y = \frac{b}{t},$$

avec $a, b \in A$ et $s, t \in S$. Alors

$$[x : y] = [at : bs]$$

car $(at, bs) = st(x, y)$. Le couple (at, bs) n'est pas nul puisque (x, y) ne l'est pas. Le point $[x : y]$ est donc l'image de $[at, bs] \in W(A) \setminus \{\perp\}$. Ainsi Θ est surjective.

8

Si $y \neq 0$, alors

$$[x : y] = [xy^{-1} : 1].$$

Si $[u : 1] = [v : 1]$, il existe $\lambda \in K^*$ tel que $(v, 1) = \lambda(u, 1)$. La seconde coordonnée impose $\lambda = 1$, puis $u = v$. L'écriture $[x : 1]$ est donc unique.

Si la seconde coordonnée est nulle, un point projectif s'écrit $[x : 0]$ avec $x \neq 0$, et

$$[x : 0] = [1 : 0]$$

après multiplication par x^{-1}. Il y a donc un unique tel point.

On obtient alors

$$\mathbf{P}^1(K) \simeq K \sqcup \{\infty\},$$

et la question 7 donne

$$W(A) \setminus \{\perp\} \simeq \mathbf{P}^1(K).$$

Par conséquent,

$$\boxed{W(A) \simeq K \sqcup \{\infty, \perp\}}$$

comme ensembles.

Il faut distinguer les deux points ajoutés : ∞ appartient déjà à la complétion projective de la droite affine, alors que $\perp$ provient précisément du couple nul que la définition de l'espace projectif exclut.

IV Les opérations de fractions survivent-elles ?

9

Supposons

$$s(a,b) = t(a',b'), \qquad u(c,d) = v(c',d'),$$

avec $s, t, u, v \in S$. On a alors

$$sa = ta', \quad sb = tb', \quad uc = vc', \quad ud = vd'.$$

Pour l'addition,

$$\begin{aligned} su(ad + bc) &= (sa)(ud) + (sb)(uc) \\ &= (ta')(vd') + (tb')(vc') \\ &= tv(a'd' + b'c'), \end{aligned}$$

et

$$su(bd) = (sb)(ud) = (tb')(vd') = tv(b'd').$$

Comme $su, tv \in S$, les deux sommes sont équivalentes. L'addition est bien définie.

Pour la multiplication,

$$su(ac) = (sa)(uc) = (ta')(vc') = tv(a'c')$$

et, comme ci-dessus, $su(bd) = tv(b'd')$. La multiplication est donc bien définie.

Enfin, si $s(a, b) = t(a', b')$, alors

$$s(-a, b) = (-sa, sb) = (-ta', tb') = t(-a', b'),$$

ce qui montre que la négation est bien définie.

La commutativité de $+$ et de $\cdot$ est immédiate sur les formules. Pour l'associativité, si $x = [a, b]$, $y = [c, d]$ et $z = [e, f]$, alors

$$(x + y) + z = [adf + bcf + bde, bdf] = x + (y + z),$$

et

$$(xy)z = [ace, bdf] = x(yz).$$

Par ailleurs,

$$[a, b] + [0, 1] = [a, b], \qquad [a, b][1, 1] = [a, b].$$

Ainsi $(W(A), +, 0)$ et $(W(A), \cdot, 1)$ sont deux monoïdes commutatifs.

En revanche, la négation n'est pas en général l'inverse pour l'addition. On a $-\infty = [-1, 0] = [1, 0] = \infty$, car $-1 \in S$, et donc

$$\infty + (-\infty) = \infty + \infty = \bot \neq 0.$$

C'est une autre manifestation du fait que la structure additive globale n'est pas un groupe.

10

Si $a/b = c/d$ dans K, alors $ad = bc$. Comme $b, d \neq 0$, la question 5(a) donne $(a, b) \approx (c, d)$. L'application j est donc bien définie.

Réciproquement, si $j(a/b) = j(c/d)$, la même question 5(a) donne $ad = bc$, donc $a/b = c/d$ dans K. Ainsi j est injective.

Les formules définissant les opérations dans $W(A)$ sont exactement celles des fractions ordinaires. On a donc

$$j(0) = 0, \qquad j(1) = 1,$$
$$j(x+y) = j(x) + j(y), \qquad j(xy) = j(x)j(y), \qquad j(-x) = -j(x).$$

Enfin, si $x = a/b \neq 0$, alors $a \neq 0$ et

$$\iota(j(x)) = \iota([a,b]) = [b,a] = j\left(\frac{b}{a}\right) = j(x^{-1}).$$

11

Écrivons $x = [a,b] \in K$, donc $b \neq 0$.

Pour l'addition,

$$x + \infty = [a,b] + [1,0] = [b,0].$$

Comme $b \neq 0$,

$$[b,0] = [1,0] = \infty.$$

En revanche,

$$\infty + \infty = [1,0] + [1,0] = [0,0] = \bot.$$

Pour la multiplication,

$$x\infty = [a,b][1,0] = [a,0].$$

Si $x \neq 0$, alors $a \neq 0$, donc $[a,0] = \infty$. Mais

$$0\infty = [0,1][1,0] = [0,0] = \bot,$$

et

$$\infty^2 = [1,0][1,0] = [1,0] = \infty.$$

Enfin,

$$x + \bot = [a,b] + [0,0] = [0,0] = \bot,$$

et

$$x\bot = [a,b][0,0] = [0,0] = \bot.$$

Le point $\bot$ est donc absorbant pour l'addition et la multiplication dans cette construction.

12

Pour $z = [a,b]$,

$$0z = [0,1][a,b] = [0,b].$$

Si $b \neq 0$, la question 5(a) donne $[0,b] = [0,1] = 0$.

Si $b = 0$, alors $[0, b] = [0, 0] = \perp \neq 0$. Ainsi

$$0z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b \neq 0.$$

Les classes qui admettent un représentant à dénominateur non nul sont précisément celles provenant de K par j. Par conséquent

$$\boxed{R = j(K) \simeq K = S^{-1}A.}$$

IDÉE L'extension totale ne remplace pas la localisation ordinaire : elle la contient exactement comme partie régulière.

13

Prenons

$$x = [a, b], \qquad y = [c, d], \qquad z = [e, f].$$

On calcule

$$(x + y)z = [(ad + bc)e, bdf]$$

et

$$0z = [0, f].$$

Donc

$$(x + y)z + 0z = [(ad + bc)ef, bdf^2].$$

D'autre part,

$$xz = [ae, bf], \qquad yz = [ce, df],$$

puis

$$xz + yz = [aedf + cebf, bdf^2] = [(ad + bc)ef, bdf^2].$$

Les représentants sont même identiques. Ainsi

$$\boxed{(x + y)z + 0z = xz + yz.}$$

Si $z \in R$, alors $0z = 0$, d'où

$$(x + y)z = xz + yz.$$

En revanche, avec $x = 1$, $y = 0$ et $z = \infty$,

$$(1 + 0)\infty = \infty,$$

alors que

$$1\infty + 0\infty = \infty + \perp = \perp.$$

Comme $\infty \neq \perp$, la distributivité ordinaire échoue dans $W(A)$.

V Une propriété de factorisation

14

Supposons $[a,b]=[c,d]$. Il existe $s,t\in S$ tels que

$$s(a,b)=t(c,d).$$

Dans M, en utilisant la commutativité et l'hypothèse $\varphi(s)\varphi(s)^*=1$,

$$\begin{aligned}\varphi(sa)\varphi(sb)^* &= \varphi(s)\varphi(a)\big(\varphi(s)\varphi(b)\big)^*\\ &= \varphi(s)\varphi(s)^*\,\varphi(a)\varphi(b)^*\\ &= \varphi(a)\varphi(b)^*.\end{aligned}$$

De même,

$$\varphi(tc)\varphi(td)^*=\varphi(c)\varphi(d)^*.$$

Or $sa=tc$ et $sb=td$, donc les membres de gauche sont égaux. Ainsi

$$\varphi(a)\varphi(b)^*=\varphi(c)\varphi(d)^*,$$

et $\widehat{\varphi}$ est bien définie.

Pour la multiplication,

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}([a,b][c,d]) &= \widehat{\varphi}([ac,bd])\\ &= \varphi(ac)\varphi(bd)^*\\ &= \varphi(a)\varphi(b)^*\,\varphi(c)\varphi(d)^*\\ &= \widehat{\varphi}([a,b])\widehat{\varphi}([c,d]).\end{aligned}$$

De plus,

$$\widehat{\varphi}(1)=\widehat{\varphi}([1,1])=1,$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(\iota([a,b])) &= \widehat{\varphi}([b,a])\\ &= \varphi(b)\varphi(a)^*\\ &= \big(\varphi(a)\varphi(b)^*\big)^*\\ &= \widehat{\varphi}([a,b])^*.\end{aligned}$$

Ainsi $\widehat{\varphi}$ est un morphisme de monoïdes à involution. Enfin,

$$(\widehat{\varphi}\circ\eta)(a)=\widehat{\varphi}([a,1])=\varphi(a)\varphi(1)^*=\varphi(a).$$

Tout élément de $W(A)$ vérifie

$$\eta(a)\,\iota(\eta(b))=[a,1][1,b]=[a,b].$$

Si $F:W(A)\to M$ est un morphisme de monoïdes à involution tel que $F\circ\eta=\varphi$, alors

$$\begin{aligned} F([a,b]) &= F\big(\eta(a)\,\iota(\eta(b))\big) \\ &= F(\eta(a))\,F(\iota(\eta(b))) \\ &= \varphi(a)\,\varphi(b)^*. \end{aligned}$$

Donc $F = \widehat{\varphi}$. L'extension est unique.

Dans la question 2, on imposait que chaque $\varphi(s)$ devienne un élément inversible et l'on utilisait son inverse multiplicatif. Ici, on impose plutôt

$$\varphi(s)\varphi(s)^* = 1,$$

c'est-à-dire que l'involution fournisse, pour les éléments de S, un inverse multiplicatif. La construction $W(A)$ est alors universelle pour cette exigence au niveau du monoïde multiplicatif muni de son involution.

IDÉE Cette formulation est volontairement concrète. Dans l'article de Carlström, elle apparaît comme la propriété universelle de la construction multiplicative sous-jacente ; l'étude complète des wheels ajoute les opérations additives et conduit à un énoncé catégorique plus riche.

VI Une autre totalisation locale

15

Si $x \neq 0$, alors $x^\dagger = x^{-1} \neq 0$, donc

$$(x^\dagger)^\dagger = (x^{-1})^{-1} = x.$$

Si $x = 0$, alors $(x^\dagger)^\dagger = 0^\dagger = 0 = x$. Ainsi

$$(x^\dagger)^\dagger = x$$

pour tout $x \in K$.

Si $x \neq 0$,

$$x(xx^\dagger) = x(xx^{-1}) = x,$$

et, si $x = 0$, les deux membres sont nuls. On a donc également

$$x(xx^\dagger) = x$$

pour tout $x \in K$.

Avec la convention $x/y = x\,y^\dagger$,

$$\frac{1}{0} = 1 \cdot 0^\dagger = 0.$$

Cette totalisation conserve donc d'autres identités globales que la wheel construite dans le problème, au prix d'un choix différent pour l'inversion de 0.

Bilan culturel

Le problème a suivi la construction de fractions proposée par Jesper Carlström pour les wheels : la relation d'équivalence est modifiée de façon à ne pas s'effondrer lorsque le dénominateur nul est autorisé, et la structure obtenue contient la localisation ordinaire comme partie régulière. La question 14 isole la propriété universelle de la construction multiplicative qui accompagne ce quotient.

Dans une autre direction, Jan A. Bergstra, John V. Tucker et leurs collaborateurs ont développé la théorie des meadows, où l'inversion est totale et satisfait notamment les deux identités de la question 15, ce qui force $0^{-1} = 0$. Les common meadows, introduits par Bergstra et Alban Ponse puis étudiés notamment par Bergstra et Tucker, utilisent au contraire une valeur d'erreur supplémentaire qui se propage dans les calculs. Il s'agit de structures définies par des choix axiomatiques différents, adaptés à des propriétés algébriques ou calculatoires différentes.

Conclusion

La construction ordinaire des fractions part de couples (a, b) avec $b \neq 0$ et d'une relation d'équivalence qui encode le produit en croix. Dès que le couple nul est autorisé, cette relation cesse d'être transitive ; la modification de Carlström rétablit un quotient non trivial. Hors du couple nul, ce quotient est exactement la droite projective $\mathbf{P}^1(K)$: il contient donc la droite affine K, son point à l'infini, puis un point supplémentaire $\perp$ issu de $(0, 0)$.

Les opérations usuelles de fractions descendent au quotient, l'inversion devient l'échange des coordonnées, et le corps $K = S^{-1}A$ réapparaît exactement comme la partie sur laquelle $0z = 0$. Enfin, la propriété de factorisation de la question 14 montre que la construction multiplicative n'est pas une convention arbitraire une fois fixée l'exigence d'une involution fournissant les inverses des éléments de S. C'est en ce sens précis — relatif aux propriétés que l'on demande de préserver — que la construction apparaît naturellement.

SOURCES

Jesper Carlström, *Wheels — on division by zero*, Mathematical Structures in Computer Science 14 (2004), 143–184. Lien direct

Jesper Carlström, *Wheels — on division by zero*, Stockholm University Research Report 11 (2001), version originale du rapport. Lien direct

Jan A. Bergstra et John V. Tucker, *The Rational Numbers as an Abstract Data Type*, Journal of the ACM 54 (2007). Lien direct

Jan A. Bergstra, Yoram Hirshfeld et John V. Tucker, *Meadows and the equational specification of division*, Theoretical Computer Science 410 (2009), 1261–1271. Lien direct

Jan A. Bergstra et Alban Ponse, *Division by zero in common meadows* (2014/2015). Lien direct

Jan A. Bergstra et John V. Tucker, *A Complete Finite Axiomatisation of the Equational Theory of Common Meadows.* Lien direct