

DM n°02 — Sur la possibilité de diviser par zéro

Wheels et division totale ·
Relations d'équivalence et
quotients · Anneaux et corps des
fractions · Localisation · Droite
projective · Morphismes et
propriétés universelles

Dans un corps, l'inverse multiplicatif n'est défini que pour les éléments non nuls. Cela n'interdit pas, dans l'absolu, de chercher à donner un sens à la division par zéro : il faut alors définir ce que signifie $1/0$ et accepter de sacrifier certaines propriétés usuelles. Une façon « naturelle » de procéder est de repartir de la construction même des fractions. On cherchera ce qui se produit lorsque l'on cesse d'interdire les dénominateurs nuls, tout en exigeant que les objets obtenus restent compatibles avec les fractions ordinaires et avec des opérations algébriques naturelles.

Dans tout le problème, A désigne un anneau commutatif intègre, $S = A \setminus \{0\}$ et $K = \text{Frac}(A)$ son corps des fractions. On suppose connues les notions d'anneau, de corps, de relation d'équivalence, de quotient et de morphisme d'anneaux. La droite projective et la notion de monoïde à involution seront définies lorsqu'elles apparaîtront.

I Repartir de la construction des fractions

- 1 Sur $A \times S$, on définit

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

- (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
(b) On note a/b la classe de (a, b) . Vérifier que les formules usuelles

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

donnent des opérations bien définies sur $(A \times S)/\sim$.

On retrouve ainsi le corps $K = \text{Frac}(A)$.

- 2 Soit B un anneau commutatif et $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux tel que $f(s)$ soit inversible dans B pour tout $s \in S$.

- (a) Montrer que la formule

$$\tilde{f}\left(\frac{a}{b}\right) = f(a)f(b)^{-1}$$

définit un morphisme d'anneaux $\tilde{f} : K \rightarrow B$ tel que $\tilde{f}(a/1) = f(a)$ pour tout $a \in A$.

- (b) Montrer que $\tilde{f}$ est l'unique morphisme possédant cette propriété.

Cette propriété de factorisation caractérise la construction ordinaire des fractions : elle ne décrit pas seulement des représentants, mais la façon dont le quotient reçoit les morphismes qui rendent les éléments de S inversibles.

- 3 On essaie maintenant de garder la même relation $ad = bc$, mais sur tout A^2 , afin d'autoriser $b = 0$.

- (a) Montrer que $(1, 0)$ est alors relié à $(0, 0)$ et que $(0, 0)$ est relié à $(0, 1)$.
(b) Montrer que $(1, 0)$ n'est pas relié à $(0, 1)$.

(c) Quelle propriété d'une relation d'équivalence vient d'échouer ? Quel couple est responsable de l'obstruction ?

II Un quotient qui accepte le dénominateur nul

On définit sur A^2 la relation $\approx$ par

$$(a, b) \approx (c, d) \iff \exists s, t \in S, \quad s(a, b) = t(c, d),$$

où l'égalité est une égalité dans A^2 . Autrement dit, les scalaires s et t multiplient les deux coordonnées, et

$$s(a, b) = t(c, d) \iff sa = tc \quad \text{et} \quad sb = td.$$

4 Montrer que $\approx$ est une relation d'équivalence sur A^2 .

On note

$$W(A) = A^2 / \approx$$

et $[a, b]$ la classe du couple (a, b) .

5 (a) Montrer que, si $b, d \in S$, alors

$$(a, b) \approx (c, d) \iff ad = bc.$$

Ainsi, le nouveau quotient ne modifie pas les identifications entre fractions ordinaires.

(b) Montrer que la classe de $(0, 0)$ est réduite au seul couple $(0, 0)$.

On posera désormais

$$\perp = [0, 0], \quad 0 = [0, 1], \quad 1 = [1, 1], \quad \infty = [1, 0].$$

(c) Montrer que ces quatre éléments sont deux à deux distincts, sauf bien sûr si l'anneau A est trivial, cas exclu par l'intégrité.

6 On définit formellement

$$\iota : W(A) \rightarrow W(A), \quad \iota([a, b]) = [b, a].$$

(a) Montrer que ι est bien définie.

(b) Montrer que $\iota \circ \iota = \text{id}_{W(A)}$.

(c) Déterminer $\iota(0)$, $\iota(\infty)$ et $\iota(\perp)$.

L'inversion totale apparaît donc ici sans choix de formule supplémentaire : elle est simplement l'échange des deux coordonnées d'un représentant.

III Une droite projective, et un point de plus

On définit la droite projective sur K par

$$\mathbf{P}^1(K) = (K^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim_{\text{proj}},$$

où

$$(x, y) \sim_{\text{proj}} (x', y') \iff \exists \lambda \in K^*, \quad (x', y') = \lambda(x, y).$$

La classe de (x, y) est notée $[x : y]$.

7 En identifiant A à son image canonique dans K , on considère

$$\Theta : W(A) \setminus \{\perp\} \longrightarrow \mathbf{P}^1(K), \quad \Theta([a, b]) = [a : b].$$

- (a) Montrer que Θ est bien définie.
 - (b) Montrer que Θ est injective.
 - (c) Montrer que Θ est surjective.
- 8 (a) Montrer que tout point de $\mathbf{P}^1(K)$ dont la seconde coordonnée est non nulle s'écrit de manière unique sous la forme $[x : 1]$, avec $x \in K$.
- (b) Montrer qu'il existe un unique point de $\mathbf{P}^1(K)$ dont la seconde coordonnée est nulle, à savoir $[1 : 0]$.
- (c) En déduire une bijection canonique d'ensembles

$$W(A) \simeq K \sqcup \{\infty, \perp\}.$$

Le point ∞ est donc celui que la droite projective ajoute déjà à la droite affine K . Le couple nul, exclu de la projectivisation, fournit un élément supplémentaire $\perp$.

IV Les opérations de fractions survivent-elles ?

Pour $[a, b], [c, d] \in W(A)$, on propose

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd],$$

$$[a, b] [c, d] = [ac, bd],$$

et

$$-[a, b] = [-a, b].$$

- 9 (a) Montrer que l'addition est bien définie sur les classes d'équivalence.
- (b) Montrer que la multiplication est bien définie.
- (c) Montrer que la négation est bien définie.
- (d) Vérifier que $(W(A), +, 0)$ et $(W(A), \cdot, 1)$ sont des monoïdes commutatifs. La notation $-x$ désigne-t-elle pour autant toujours l'inverse de x pour l'addition ? Tester le cas $x = \infty$.

On pourra, pour (a) et (b), partir de

$$s(a, b) = t(a', b'), \quad u(c, d) = v(c', d')$$

avec $s, t, u, v \in S$, et chercher deux facteurs de comparaison pour les résultats des opérations.

10 L'application canonique $j : K \rightarrow W(A)$ est définie par

$$j\left(\frac{a}{b}\right) = [a, b], \quad b \neq 0.$$

- (a) Montrer que j est bien définie et injective.
- (b) Montrer que j préserve 0, 1, l'addition, la multiplication et l'opposé.
- (c) Montrer que, pour tout $x \in K^*$,

$$\iota(j(x)) = j(x^{-1}).$$

Dans la suite, on identifiera K à son image $j(K)$ dans $W(A)$.

11 Déterminer, pour $x \in K$ et $x \neq 0$ lorsque cela est nécessaire :

- (a) $x + \infty$, puis $\infty + \infty$;
- (b) $x\infty$, 0∞ et ∞^2 ;
- (c) $x + \perp$ et $x\perp$.

12 On appelle partie régulière de $W(A)$ l'ensemble

$$R = \{z \in W(A) \mid 0z = 0\}.$$

- (a) Si $z = [a, b]$, calculer $0z$.
 - (b) Montrer que $0z = 0$ si et seulement si $b \neq 0$.
 - (c) En déduire que $R = K$ sous l'identification de la question 10. Ainsi, la localisation ordinaire $S^{-1}A = K$ se retrouve exactement comme une sous-structure de la construction totale.
- 13 (a) Montrer, directement à partir des représentants, que pour tous $x, y, z \in W(A)$,

$$(x + y)z + 0z = xz + yz.$$

- (b) Montrer que la distributivité ordinaire

$$(x + y)z = xz + yz$$

est donc retrouvée dès que $z \in R$.

- (c) Vérifier qu'elle échoue en général dans $W(A)$ en prenant $x = 1$, $y = 0$ et $z = \infty$.

La construction contient donc bien le corps K , mais elle n'est pas elle-même un anneau : rendre l'inversion totale oblige ici à modifier certaines identités globales.

V Une propriété de factorisation

Un **monoïde commutatif à involution** est un monoïde commutatif $(M, \cdot, 1)$ muni d'une application $x \mapsto x^*$ telle que

$$(x^*)^* = x, \quad (xy)^* = x^*y^*, \quad 1^* = 1.$$

Un morphisme de monoïdes à involution est un morphisme de monoïdes qui commute à l'involution.

On regarde A seulement comme monoïde multiplicatif et on note

$$\eta : A \rightarrow W(A), \quad \eta(a) = [a, 1].$$

La multiplication de $W(A)$ et l'application ι en font un monoïde commutatif à involution.

- 14 Soit $(M, \cdot, 1, *)$ un monoïde commutatif à involution et soit $\varphi : A \rightarrow M$ un morphisme de monoïdes tel que

$$\varphi(s)\varphi(s)^* = 1$$

pour tout $s \in S$.

- (a) Montrer que la formule

$$\widehat{\varphi}([a, b]) = \varphi(a)\varphi(b)^*$$

définit une application bien définie $W(A) \rightarrow M$.

- (b) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est un morphisme de monoïdes à involution et que

$$\widehat{\varphi} \circ \eta = \varphi.$$

- (c) Montrer que tout élément de $W(A)$ s'écrit

$$[a, b] = \eta(a) \iota(\eta(b)).$$

En déduire l'unicité de $\widehat{\varphi}$ parmi les morphismes de monoïdes à involution prolongeant φ .

- (d) Comparer la propriété obtenue à celle de la question 2 : quelle exigence remplace ici le fait de rendre les éléments de S inversibles ?

Cette factorisation est la manifestation concrète d'une propriété universelle de la construction multiplicative de Carlström. Son article établit en outre un résultat plus fort sur la compatibilité de l'addition et de 0 avec cette construction ; ce renforcement n'est pas nécessaire ici.

VI Une autre totalisation locale

- 15 Sur le même corps K , on définit une autre inversion totale par

$$x^\dagger = \begin{cases} x^{-1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Vérifier que, pour tout $x \in K$,

$$(x^\dagger)^\dagger = x$$

et

$$x(xx^\dagger) = x.$$

- (b) Quelle valeur cette structure donne-t-elle à $1/0$ si l'on pose $x/y = x y^\dagger$?

Les deux identités de (a), ajoutées aux axiomes d'un anneau commutatif unitaire, constituent une axiomatisation usuelle des **meadows**. Cette dernière question montre seulement qu'une autre totalisation cohérente est possible ; leur comparaison systématique relève d'un autre problème.

Bilan culturel

La théorie des **wheels** a été systématisée par Jesper Carlström, d'abord dans un rapport de 2001 puis dans un article publié en 2004. Sa construction part précisément de fractions par couples, de quotients et de localisations, et l'article étudie en quel sens les axiomes obtenus sont naturels. Une autre famille de totalisations est issue des travaux de Jan A. Bergstra, John V. Tucker et de leurs collaborateurs : les **meadows** totalisent l'inversion avec $0^{-1} = 0$, tandis que les **common meadows**, introduits par Bergstra et Alban Ponse puis étudiés notamment par Bergstra et Tucker, ajoutent une valeur d'erreur absorbante pour la division par zéro. Ces structures correspondent à des ensembles différents d'axiomes, de propriétés à préserver et d'objectifs algébriques ou calculatoires.

Conclusion

En partant de la construction ordinaire du corps des fractions, l'autorisation d'un dénominateur nul a forcé à modifier la relation d'équivalence elle-même. Le quotient obtenu contient naturellement la droite projective $\mathbf{P}^1(K)$ ainsi qu'un point supplémentaire issu du couple nul ; l'inversion est l'échange des coordonnées, la localisation ordinaire réapparaît exactement comme partie régulière, et la construction multiplicative satisfait une propriété de factorisation et d'unicité. Ces résultats ne disent pas qu'une totalisation est imposée sans hypothèses : ils montrent précisément quelles exigences rendent cette construction structurellement naturelle.