

CORRIGÉ

MP · CORRIGÉ

CHAPITRES

Le calcul différentiel discret

Polynômes · Algèbre linéaire ·
Coefficients binomiaux · Suites et
sommes finies

La convention du sujet est la différence **en avant** de pas 1 : $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$. Toutes les formules ci-dessous utilisent cette convention.

I Une dérivée sans limite ?

1

On obtient

$$\begin{aligned}\Delta 1 &= 0, \\ \Delta X &= 1, \\ \Delta X^2 &= 2X + 1,\end{aligned}$$

et

$$\Delta X^3 = 3X^2 + 3X + 1.$$

Comme la dérivation usuelle, Δ annule les constantes et abaisse ici le degré d'une unité. Mais les termes de degré inférieur ne disparaissent pas : par exemple $(X^2)' = 2X$ tandis que $\Delta X^2 = 2X + 1$.

2

(a) Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + \mu Q)(X) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Delta P + \mu \Delta Q.$$

Donc Δ est linéaire.

(b) Écrivons

$$P(X) = a_d X^d + \text{termes de degré inférieur}, \quad a_d \neq 0.$$

Alors

$$P(X+1) - P(X) = a_d((X+1)^d - X^d) + R(X),$$

où $R = 0$ si $d = 1$, et $\deg R \leq d - 2$ si $d \geq 2$. Or, par la formule du binôme,

$$(X+1)^d - X^d = dX^{d-1} + \text{termes de degré au plus } d-2.$$

Par conséquent

$$\deg(\Delta P) = d - 1$$

et le coefficient dominant de ΔP vaut

$$d a_d.$$

(c) Toutes les constantes appartiennent à $\ker \Delta$. Réciproquement, si P n'est pas constant, alors $\deg(\Delta P) = \deg P - 1$, donc $\Delta P \neq 0$. Ainsi

$$\ker \Delta = \mathbb{R}.$$

3 _____

(a) On écrit

$$P(X+1) = P(X) + \Delta P(X), \quad Q(X+1) = Q(X) + \Delta Q(X).$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta(PQ) &= P(X+1)Q(X+1) - P(X)Q(X) \\ &= (P + \Delta P)(Q + \Delta Q) - PQ \\ &= P \Delta Q + Q \Delta P + (\Delta P)(\Delta Q). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Delta(PQ) = P \Delta Q + Q \Delta P + (\Delta P)(\Delta Q).$$

(b) En ajoutant et retranchant $P(X+1)Q(X)$,

$$\begin{aligned} \Delta(PQ) &= P(X+1)(Q(X+1) - Q(X)) \\ &\quad + Q(X)(P(X+1) - P(X)), \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta(PQ) = P(X+1) \Delta Q + Q \Delta P.$$

Une formule symétrique s'obtient en échangeant P et Q :

$$\Delta(PQ) = P \Delta Q + Q(X+1) \Delta P.$$

Il existe donc bien une règle de produit, mais Δ n'est pas une dérivation au sens algébrique : la règle de Leibniz usuelle doit être corrigée par le terme $(\Delta P)(\Delta Q)$, ou bien par un décalage d'un des facteurs.

4 _____

(a) Si $P \in E_n$, alors $\Delta P \in E_{n-1}$ lorsque P est non constant, et $\Delta P = 0$ lorsqu'il est constant. Donc $\Delta(E_n) \subset E_n$. Avec la linéarité de la question 2, Δ induit bien un endomorphisme de E_n .

(b) Pour $n \geq 1$, le noyau de la restriction de Δ à E_n est l'espace des constantes, de dimension 1. Le théorème du rang donne donc

$$\dim \operatorname{Im} \Delta = (n+1) - 1 = n.$$

Or $\text{Im } \Delta \subset E_{n-1}$ et $\dim E_{n-1} = n$. Par conséquent

$$\boxed{\text{Im } \Delta = E_{n-1}}.$$

(c) Chaque application de Δ abaisse d'au moins une unité le degré d'un polynôme non constant. Ainsi

$$\boxed{\Delta^{n+1} = 0 \quad \text{sur } E_n}.$$

Si le coefficient de X^n dans P est a_n , les coefficients dominants sont multipliés successivement par

$$n, n-1, \dots, 1.$$

On obtient donc

$$\boxed{\Delta^n P = n! a_n}.$$

II Les bons monômes du monde discret

5

(a) Pour $k = 0$, $B_0 = 1$. Pour $k \geq 1$, le numérateur de B_k est un produit de k polynômes unitaires de degré 1. Ainsi

$$\deg B_k = k$$

et son coefficient dominant vaut

$$\frac{1}{k!}.$$

(b) Les polynômes $B_0, \dots, B_n$ ont des degrés deux à deux distincts, donc la famille est libre. Elle comporte $n+1$ éléments dans E_n , qui est de dimension $n+1$. Ainsi

$$\boxed{(B_0, \dots, B_n) \text{ est une base de } E_n}.$$

6

(a) On a

$$\Delta B_0 = 0, \quad \Delta B_1 = 1 = B_0.$$

De plus,

$$B_2(X) = \frac{X(X-1)}{2},$$

donc

$$\Delta B_2(X) = \frac{(X+1)X - X(X-1)}{2} = X = B_1(X).$$

Enfin,

$$B_3(X) = \frac{X(X-1)(X-2)}{6},$$

et

$$\begin{aligned}\Delta B_3(X) &= \frac{(X+1)X(X-1) - X(X-1)(X-2)}{6} \\ &= \frac{X(X-1)}{6}((X+1) - (X-2)) \\ &= \frac{X(X-1)}{2} = B_2(X).\end{aligned}$$

La régularité suggère que Δ décale l'indice d'une unité vers le bas.

(b) Pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}B_k(X+1) - B_k(X) &= \frac{(X+1)X \cdots (X-k+2) - X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!} \\ &= \frac{X(X-1) \cdots (X-k+2)}{k!}((X+1) - (X-k+1)) \\ &= \frac{k X(X-1) \cdots (X-k+2)}{k!} \\ &= B_{k-1}(X).\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\Delta B_k = B_{k-1} \quad (k \geq 1)},$$

avec $\Delta B_0 = 0$.

7

(a) Si $j \leq k$, on applique j fois la relation précédente :

$$\Delta^j B_k = B_{k-j}.$$

Si $j > k$, après k différences on obtient B_0 , puis la différence suivante est nulle. Ainsi

$$\boxed{\Delta^j B_k = \begin{cases} B_{k-j}, & j \leq k, \\ 0, & j > k. \end{cases}}$$

Cette formule contient bien le cas $j = 0$.

(b) Dans la base $(B_0, B_1, \dots, B_n)$,

$$\Delta B_0 = 0, \quad \Delta B_1 = B_0, \quad \dots, \quad \Delta B_n = B_{n-1}.$$

Donc

$$\text{Mat}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Si $C_k = X^k/k!$, alors pour $k \geq 1$,

$$C'_k = C_{k-1},$$

et $C'_0 = 0$. La dérivation dans la base $(C_0, \dots, C_n)$ a donc exactement la même matrice. C'est le parallèle structurel précis entre les deux opérateurs.

8

La relation de la question 6 s'écrit

$$B_k(X+1) - B_k(X) = B_{k-1}(X),$$

donc

$$\boxed{B_k(X+1) = B_k(X) + B_{k-1}(X)}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1},$$

c'est-à-dire la relation de Pascal.

III Une formule de Taylor sur une grille

9

(a) On a

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x).$$

Puis

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x) \\ &= f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x). \end{aligned}$$

(b) Les coefficients sont les coefficients binomiaux, avec des signes alternés. On conjecture

$$\boxed{\Delta^k f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j)}.$$

Pour $k=0$, le membre de droite vaut bien $f(x)$.

(c) Supposons la formule vraie à l'ordre k . Alors

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} f(x) &= \Delta^k f(x+1) - \Delta^k f(x) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j+1) - \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j). \end{aligned}$$

Dans la première somme, on pose $r = j+1$. Pour $1 \leq r \leq k$, le coefficient de $f(x+r)$ devient

$$(-1)^{k-r+1} \binom{k}{r-1} - (-1)^{k-r} \binom{k}{r} = (-1)^{k+1-r} \binom{k+1}{r},$$

par la relation de Pascal. Les deux termes extrêmes ont également les coefficients attendus. On obtient donc la formule à l'ordre $k + 1$.

10

(a) Partons de

$$P = \sum_{k=0}^n a_k B_k.$$

Pour $j \in \{0, \dots, n\}$,

$$\Delta^j P = \sum_{k=j}^n a_k B_{k-j}.$$

En $X = 0$, on a $B_0(0) = 1$ et $B_r(0) = 0$ pour $r \geq 1$. Il reste donc uniquement le terme $k = j$:

$$\boxed{\Delta^j P(0) = a_j}.$$

(b) Les coordonnées de P dans la base $(B_0, \dots, B_n)$ sont donc

$$a_j = \Delta^j P(0).$$

La formule de reconstruction est

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^n \Delta^k P(0) B_k(X)}.$$

C'est la formule de Newton discrète dans ce cadre.

(c) La formule de Taylor polynomiale en 0 s'écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Dans le calcul continu, les polynômes $X^k/k!$ satisfont

$$\left(\frac{X^k}{k!} \right)' = \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Dans le calcul discret, les B_k satisfont

$$\Delta B_k = B_{k-1}.$$

Les B_k jouent donc le rôle des monômes divisés adaptés à Δ , et les dérivées successives en 0 sont remplacées par les différences successives en 0.

11

(a) La question 9 donne, en $x = 0$,

$$\boxed{\Delta^k P(0) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j)}.$$

Ainsi chaque coordonnée de P dans la base (B_k) dépend uniquement des valeurs $P(0), \dots, P(k)$.

En substituant dans la formule de Newton, on peut aussi écrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j) \right) B_k(X).$$

(b) Les valeurs $P(0), \dots, P(n)$ déterminent donc toutes les coordonnées de P dans la base $(B_0, \dots, B_n)$, donc déterminent P lui-même.

On retrouve ici, pour les nœuds équidistants $0, 1, \dots, n$, une autre forme de l'unicité connue par l'interpolation de Lagrange.

12 —

(a) La table des différences en avant est

j	0	1	2	3
$P(j)$	2	3	8	23
$\Delta P(j)$	1	5	15	
$\Delta^2 P(j)$	4	10		
$\Delta^3 P(j)$	6			

Ainsi

$$P(0) = 2, \quad \Delta P(0) = 1, \quad \Delta^2 P(0) = 4, \quad \Delta^3 P(0) = 6.$$

(b) La formule de Newton donne

$$P = 2B_0 + B_1 + 4B_2 + 6B_3.$$

Or

$$B_1 = X, \quad B_2 = \frac{X(X-1)}{2}, \quad B_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X) &= 2 + X + 2X(X-1) + X(X-1)(X-2) \\ &= X^3 - X^2 + X + 2. \end{aligned}$$

IV Primitives discrètes et sommes exactes

13 —

(a) Si

$$P = \sum_{k=0}^n a_k B_k,$$

alors, puisque $\Delta B_{k+1} = B_k$,

$$Q = \sum_{k=0}^n a_k B_{k+1}$$

vérifie $\Delta Q = P$. Plus généralement,

$$Q = C + \sum_{k=0}^n a_k B_{k+1}$$

est une primitive discrète pour tout $C \in \mathbb{R}$.

(b) Si Q_1 et Q_2 sont deux primitives discrètes de P , alors

$$\Delta(Q_1 - Q_2) = 0.$$

Donc $Q_1 - Q_2$ est constant.

(c) Soit P non nul de degré d et de coefficient dominant a . Si Q est une primitive discrète de degré r , alors

$$\deg(\Delta Q) = r - 1.$$

Comme $\Delta Q = P$, on a $r = d + 1$. Si b est le coefficient dominant de Q , alors le coefficient dominant de ΔQ vaut $(d + 1)b$. Ainsi

$$(d + 1)b = a,$$

donc

$$b = \frac{a}{d + 1}.$$

14

(a) Pour tout entier m ,

$$P(m) = Q(m + 1) - Q(m).$$

Par télescopage,

$$\begin{aligned} \sum_{m=a}^{b-1} P(m) &= \sum_{m=a}^{b-1} (Q(m + 1) - Q(m)) \\ &= Q(b) - Q(a). \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{m=a}^{b-1} P(m) = Q(b) - Q(a).$$

(b) Pour une primitive usuelle F de f ,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

La somme finie joue ici le rôle de l'intégrale, tandis que $\Delta Q = P$ joue le rôle de $Q' = P$.

15 _____

Comme $\Delta B_{k+1} = B_k$, le polynôme B_{k+1} est une primitive discrète de B_k . La question 14 donne donc

$$\sum_{m=0}^{n-1} B_k(m) = B_{k+1}(n) - B_{k+1}(0).$$

Or $B_{k+1}(0) = 0$. Ainsi

$$\sum_{m=0}^{n-1} B_k(m) = B_{k+1}(n) = \binom{n}{k+1}.$$

Le cas $n = 0$ est cohérent : la somme vide vaut 0.

16 _____

(a) Pour $P = X$,

$$P(0) = 0, \quad \Delta P(0) = 1,$$

d'où

$$X = B_1.$$

Pour $P = X^2$,

$$\Delta P = 2X + 1, \quad \Delta^2 P = 2,$$

donc

$$X^2 = B_1 + 2B_2.$$

Pour $P = X^3$,

$$\begin{aligned} \Delta P &= 3X^2 + 3X + 1, \\ \Delta^2 P &= 6X + 6, \end{aligned}$$

et

$$\Delta^3 P = 6.$$

Ainsi

$$X^3 = B_1 + 6B_2 + 6B_3.$$

(b) En utilisant la question 15,

$$\sum_{m=0}^{n-1} m = B_2(n) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n-1} m^2 &= B_2(n) + 2B_3(n) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\
&= \boxed{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n-1} m^3 &= B_2(n) + 6B_3(n) + 6B_4(n) \\
&= \boxed{\frac{n^2(n-1)^2}{4}}.
\end{aligned}$$

17

D'après la question 13, P possède une primitive discrète Q . Choisissons-la de sorte que $Q(0) = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m=0}^{n-1} P(m) = Q(n).$$

La fonction considérée coïncide donc sur $\mathbb{N}$ avec le polynôme Q . Si P est de degré d et de coefficient dominant a , alors Q est de degré $d+1$ et de coefficient dominant

$$\boxed{\frac{a}{d+1}}.$$

18

(a) Si $u_n = P(n)$ avec $\deg P \leq d$, alors

$$(\Delta u)_n = (\Delta P)(n).$$

Par récurrence,

$$(\Delta^k u)_n = (\Delta^k P)(n).$$

Or $\Delta^{d+1} P = 0$. Donc

$$\boxed{\Delta^{d+1} u = 0}.$$

(b) La formule de reconstruction de la partie III suggère de poser

$$R(X) = \sum_{k=0}^d (\Delta^k u)_0 B_k(X).$$

Alors $R \in \mathbb{R}_d[X]$ et, pour tout $j \in \{0, \dots, d\}$,

$$\Delta^j R(0) = (\Delta^j u)_0.$$

Posons

$$v_n = u_n - R(n).$$

On a donc

$$(\Delta^j v)_0 = 0$$

pour $0 \leq j \leq d$. De plus,

$$\Delta^{d+1} v = 0,$$

car $\Delta^{d+1} u = 0$ par hypothèse et $\Delta^{d+1} R = 0$.

La suite $\Delta^d v$ a donc une différence nulle : elle est constante. Comme son premier terme vaut 0, on obtient

$$\Delta^d v = 0.$$

Alors $\Delta^{d-1} v$ est constante et son premier terme vaut encore 0, donc

$$\Delta^{d-1} v = 0.$$

En répétant l'argument, on descend jusqu'à

$$v = 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = R(n).$$

(c) On a finalement

$$\Delta^{d+1} u = 0 \iff \exists P \in \mathbb{R}_d[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_n = P(n).$$

Cette équivalence résume l'architecture du devoir : dans la base (B_k) , l'opérateur Δ devient un décalage ; la formule de Newton reconstruit un polynôme à partir de ses différences initiales ; et l'inversion de Δ transforme les sommes en primitives discrètes.

SOURCES

Isaac Newton, *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias* (Londres, 1711), volume contenant la *Methodus differentialis*. Notice et exemplaire numérisé de la Library of Congress. [Lien direct](#)

Duncan C. Fraser, « Newton's Interpolation Formulas », *Journal of the Institute of Actuaries*, vol. 51, no 2, octobre 1918, p. 77-106, DOI 10.1017/S0020268100028407. Étude historique des textes de Newton sur l'interpolation par différences finies. [Lien direct](#)

Charles Jordan, *Calculus of Finite Differences*, 3e éd., AMS Chelsea Publishing, 1965. Référence classique sur les opérateurs de différence, l'interpolation et la sommation discrète. [Lien direct](#)