

CORRIGÉ

MP · CORRIGÉ

CHAPITRES

De $1 + \sqrt{2}$ à 2 : le dernier pas vers la conjecture de Crouzeix

Champ numérique et conjecture de Crouzeix · Normes d'opérateurs · Polynômes de matrices · Algèbre linéaire et réduction

Le corrigé suit exactement le fil du sujet. Les notions hermitiennes sur $\mathbb{C}^d$ ont été introduites dans l'énoncé car le produit scalaire hermitien est explicitement hors programme officiel de MP. L'objectif n'est pas de masquer ce dépassement, mais d'isoler les quelques propriétés élémentaires nécessaires pour laisser l'essentiel du travail porter sur le raisonnement.

I Du scalaire à la matrice : le champ numérique

1

(a) Pour tout vecteur x de norme 1,

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\|.$$

En prenant le supremum sur la sphère unité,

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Pour l'adjoint, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour $\|x\| = 1$,

$$\|A^*x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle A^*x, y \rangle| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, Ay \rangle| \leq \|A\|.$$

Ainsi $\|A^*\| \leq \|A\|$. En appliquant la même inégalité à A^* et en utilisant $(A^*)^* = A$, on obtient l'inégalité réciproque. Donc

$$\boxed{\|A^*\| = \|A\|}.$$

(b) Par sous-multiplicativité,

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2.$$

Réciproquement, pour tout x unitaire,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*Ax\| \leq \|A^*A\|.$$

En prenant le supremum,

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\|.$$

D'où

$$\boxed{\|A^*A\| = \|A\|^2}.$$

(c) La sous-multiplicativité donne par récurrence

$$\|Q^n\| \leq \|Q\|^n \leq 1.$$

Puis

$$\|Q^{*n}\| = \|(Q^n)^*\| = \|Q^n\| \leq 1.$$

(d) Comme V est une isométrie,

$$\|V(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2.$$

En développant les deux membres et en utilisant $\|Vx\| = \|x\|$ et $\|Vy\| = \|y\|$, on obtient

$$\operatorname{Re}\langle Vx, Vy \rangle = \operatorname{Re}\langle x, y \rangle.$$

On applique ensuite le même calcul à $x + iy$. Comme le produit scalaire est linéaire en première variable, cela donne l'égalité des parties imaginaires. Ainsi

$$\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Par conséquent,

$$\langle V^*Vx, y \rangle = \langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle,$$

et donc

$$V^*V = I_d.$$

Par définition d'une isométrie, $\|V\| = 1$. La question 1(a) donne alors $\|V^*\| = 1$.

2

L'application

$$x \mapsto \langle Ax, x \rangle$$

est continue sur la sphère unité de $\mathbb{C}^d$, qui est compacte en dimension finie. Son image $W(A)$ est donc compacte.

Pour $\|x\| = 1$, Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\|.$$

Donc

$$W(A) \subset \overline{D}(0, \|A\|).$$

Enfin, si $Ax = \lambda x$ avec $x \neq 0$, on normalise x en posant $u = x/\|x\|$. Alors

$$\langle Au, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle = \lambda.$$

Ainsi toute valeur propre appartient à $W(A)$.

3

(a) Pour $x = (u, v)$,

$$Nx = (v, 0), \quad \|Nx\| = |v| \leq \sqrt{|u|^2 + |v|^2} = \|x\|.$$

Donc $\|N\| \leq 1$. Avec $x = (0, 1)$, on obtient $\|Nx\| = 1$, donc

$$\boxed{\|N\| = 1}.$$

(b) Si $\|x\| = 1$,

$$\langle Nx, x \rangle = v\bar{u}.$$

Or

$$|v\bar{u}| = |u||v| \leq \frac{|u|^2 + |v|^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc $W(N) \subset \overline{D}(0, 1/2)$.

Réciproquement, soit $z = re^{i\theta}$ avec $0 \leq r \leq 1/2$. Il existe $a \in [0, 1]$ tel que

$$a\sqrt{1-a^2} = r,$$

car la fonction $a \mapsto a\sqrt{1-a^2}$ est continue sur $[0, 1]$, nulle aux extrémités et prend la valeur $1/2$ en $a = 1/\sqrt{2}$. En choisissant

$$u = ae^{-i\theta}, \quad v = \sqrt{1-a^2},$$

on a $|u|^2 + |v|^2 = 1$ et

$$v\bar{u} = re^{i\theta} = z.$$

Ainsi

$$\boxed{W(N) = \overline{D}(0, 1/2)}.$$

(c) Pour $p(z) = z$,

$$\|p(N)\| = \|N\| = 1, \quad \max_{z \in W(N)} |p(z)| = \frac{1}{2}.$$

L'inégalité universelle imposerait donc $1 \leq C/2$, soit

$$\boxed{C \geq 2}.$$

La constante 2 de Crouzeix, si elle est valable, est donc nécessairement optimale.

4

(a) Posons

$$B = \frac{A - cI}{R}.$$

Pour tout x unitaire,

$$\langle Bx, x \rangle = \frac{\langle Ax, x \rangle - c}{R}.$$

Comme $W(A) \subset \overline{D}(c, R)$, on a

$$|\langle Bx, x \rangle| \leq 1.$$

Donc $w(B) \leq 1$.

(b) Par Okubo-Ando, il existe une matrice inversible X telle que

$$\|X\| \|X^{-1}\| \leq 2$$

et

$$C = X^{-1}BX$$

soit une contraction. Écrivons

$$q(z) = p(c + Rz).$$

Alors $p(A) = q(B)$ et, puisque le calcul polynomial commute aux similitudes,

$$q(B) = Xq(C)X^{-1}.$$

Par von Neumann,

$$\|q(C)\| \leq \max_{|z| \leq 1} |q(z)|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|p(A)\| &\leq \|X\| \|X^{-1}\| \|q(C)\| \\ &\leq 2 \max_{|z| \leq 1} |p(c + Rz)| \\ &= 2 \max_{w \in D} |p(w)|. \end{aligned}$$

(c) Crouzeix demande le maximum sur $W(A)$ lui-même. Un disque contenant $W(A)$ peut être beaucoup plus grand, et donc

$$\max_D |p|$$

peut être beaucoup plus grand que

$$\max_{W(A)} |p|.$$

Le résultat de la question 4 ne suffit donc pas à contrôler $p(A)$ par la géométrie exacte de $W(A)$.

IDÉE C'est un pont réel avec Maths A X/ENS 2026 : l'épreuve démontrait von Neumann, construisait le rayon numérique puis utilisait Okubo-Ando pour obtenir la constante 2 dès que le champ numérique était enfermé dans un disque. Le saut restant consistait à remplacer ce disque par $W(A)$ lui-même.

II

Avant 2026 : la barrière $1 + \sqrt{2}$

5

Pour alléger les notations, posons

$$F = \Theta(f), \quad G = \Theta(g).$$

Puisque

$$(F + G^*)^* = F^* + G,$$

le premier terme du membre de droite vaut

$$F(F^* + G)FF^* = FF^*FF^* + FGFF^*.$$

Or Θ est multiplicative. Comme les fonctions se multiplient commutativement,

$$FGF = \Theta(f)\Theta(g)\Theta(f) = \Theta(fgf).$$

Ainsi

$$FGFF^* = \Theta(fgf)F^*,$$

qui est exactement le terme soustrait. Il reste donc

$$FF^*FF^*,$$

ce qui prouve l'identité annoncée.

6

Le membre de gauche est

$$FF^*FF^* = (FF^*)^2.$$

Comme FF^* est hermitienne positive,

$$\|FF^*FF^*\| = \|FF^*\|^2 = \|F\|^4.$$

Pour le premier terme du membre de droite,

$$\begin{aligned} \|F(F + G^*)^*FF^*\| &\leq \|F\| \|F + G^*\| \|F\| \|F^*\| \\ &\leq 2K^3. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|fgf\|_\infty \leq \|f\|_\infty^2 \|g\|_\infty \leq 1.$$

Par définition de K ,

$$\|\Theta(fgf)\| \leq K.$$

Par conséquent,

$$\|\Theta(fgf)F^*\| \leq K\|F\| \leq K^2.$$

L'identité de la question 5 donne donc

$$\|\Theta(f)\|^4 \leq 2K^3 + K^2.$$

7

Le membre de droite ne dépend plus de f . En prenant la borne supérieure,

$$K^4 \leq 2K^3 + K^2.$$

Si $K = 0$, le résultat est trivial. Sinon, en divisant par K^2 ,

$$K^2 - 2K - 1 \leq 0.$$

Les racines du trinôme sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. Comme $K \geq 0$,

$$K \leq 1 + \sqrt{2}.$$

IDÉE Cette partie reprend le cœur du lemme abstrait de Ransford–Schwenninger qui clarifie la preuve Crouzeix–Palencia. Elle montre exactement où se forme $1 + \sqrt{2}$: le contrôle d'une seule relation conduit au trinôme $K^2 - 2K - 1$. Le mécanisme de la partie suivante ne cherche pas seulement à améliorer l'un des facteurs de cette estimation ; il exploite une famille entière de relations couplées par les puissances.

III

2026 : utiliser tous les itérés

8

D'après la question 1(b),

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 = \kappa^2.$$

La matrice T^*T est hermitienne positive. Son théorème spectral donne une base orthonormée de vecteurs propres et sa norme est sa plus grande valeur propre. Il existe donc un vecteur unitaire x tel que

$$T^*Tx = \kappa^2 x.$$

En particulier,

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle = \kappa^2,$$

et donc $\|Tx\| = \kappa$.

9

(a) Par les questions 1(c) et 1(d),

$$\|S_n^*\| = 2\|V^*Q^{*n}V\| \leq 2\|V^*\| \|Q^{*n}\| \|V\| \leq 2.$$

(b) Puisque

$$T^{*n} = S_n^* - E_n,$$

on a

$$\|T^n\| = \|T^{*n}\| \leq \|S_n^*\| + \|E_n\| \leq 2 + M.$$

La suite $(\|T^n\|)$ est donc bornée.

(c) Enfin,

$$|m_n| \leq |\langle E_n T^n x, x \rangle| \leq \|E_n\| \|T^n\| \leq M(2 + M).$$

Ainsi (m_n) est bornée.

10

Par définition,

$$\kappa m_n - m_{n+1} = \operatorname{Re} \langle \kappa E_n T^n x - E_{n+1} T^{n+1} x, x \rangle.$$

Comme E_n et E_{n+1} commutent avec T , on peut faire passer les puissances de T à gauche :

$$\kappa E_n T^n - E_{n+1} T^{n+1} = T^n (\kappa E_n - E_{n+1} T).$$

C'est exactement ici que l'hypothèse de commutation intervient.

Or

$$E_n = S_n^* - T^{*n}, \quad E_{n+1} = S_{n+1}^* - T^{*(n+1)}.$$

Donc

$$\kappa E_n - E_{n+1} T = \kappa S_n^* - S_{n+1}^* T - \kappa T^{*n} + T^{*(n+1)} T.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \kappa m_n - m_{n+1} &= \operatorname{Re} \langle T^n (T^{*(n+1)} T - \kappa T^{*n}) x, x \rangle \\ &\quad - \operatorname{Re} \langle T^n (S_{n+1}^* T - \kappa S_n^*) x, x \rangle. \end{aligned}$$

Comme

$$T^{*(n+1)} T - \kappa T^{*n} = T^{*n} (T^* T - \kappa I),$$

et

$$(T^* T - \kappa I)x = (\kappa^2 - \kappa)x,$$

le premier terme devient

$$(\kappa^2 - \kappa) \langle T^n T^{*n} x, x \rangle = (\kappa^2 - \kappa) \|T^{*n} x\|^2.$$

On obtient bien

$$\boxed{\begin{aligned} \kappa m_n - m_{n+1} &= (\kappa^2 - \kappa) \|T^{*n} x\|^2 \\ &\quad - \operatorname{Re} \langle T^n (S_{n+1}^* T - \kappa S_n^*) x, x \rangle. \end{aligned}}$$

11

(a) Avec

$$y_n = (S_{n+1}^* T - \kappa S_n^*)x,$$

l'identité de l'adjoint donne

$$\langle T^n y_n, x \rangle = \langle y_n, T^{*n} x \rangle.$$

Donc le dernier terme est bien

$$\operatorname{Re} \langle y_n, T^{*n} x \rangle.$$

(b) Posons

$$a = \kappa^2 - \kappa > 0, \quad z = T^{*n} x.$$

Alors

$$a\|z\|^2 - \operatorname{Re} \langle y_n, z \rangle = a \left\| z - \frac{y_n}{2a} \right\|^2 - \frac{\|y_n\|^2}{4a}.$$

La norme carrée étant positive,

$$\boxed{\kappa m_n - m_{n+1} \geq -\frac{\|y_n\|^2}{4(\kappa^2 - \kappa)}}.$$

12

(a) À partir de

$$S_n^* = 2V^* Q^{*n} V,$$

on calcule

$$\begin{aligned} y_n &= 2V^* Q^{*(n+1)} V T x - 2\kappa V^* Q^{*n} V x \\ &= 2V^* Q^{*n} (Q^* V T x - \kappa V x) \\ &= 2V^* Q^{*n} u. \end{aligned}$$

(b) Puisque $\|V^*\| = 1$ et $\|Q^{*n}\| \leq 1$,

$$\|y_n\| \leq 2\|u\|.$$

La question 11 donne donc

$$\kappa m_n - m_{n+1} \geq -\frac{4\|u\|^2}{4(\kappa^2 - \kappa)},$$

soit

$$\boxed{\kappa m_n - m_{n+1} \geq -\frac{\|u\|^2}{\kappa^2 - \kappa}}.$$

13

Notons

$$c = \frac{\|u\|^2}{\kappa^2 - \kappa}.$$

L'inégalité précédente s'écrit

$$m_n \geq \kappa^{-1} m_{n+1} - \kappa^{-1} c.$$

Pour $n = 1$,

$$m_1 \geq \kappa^{-1} m_2 - \kappa^{-1} c.$$

Puis on remplace m_2 par sa minoration, et ainsi de suite. Une récurrence immédiate donne

$$m_1 \geq \kappa^{-P} m_{P+1} - c \sum_{n=1}^P \kappa^{-n}.$$

La suite (m_n) est bornée et $\kappa > 1$, donc

$$\kappa^{-P} m_{P+1} \longrightarrow 0.$$

De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \kappa^{-n} = \frac{1}{\kappa - 1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} m_1 &\geq -\frac{\|u\|^2}{\kappa^2 - \kappa} \frac{1}{\kappa - 1} \\ &= -\frac{\|u\|^2}{\kappa(\kappa - 1)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{m_1 \geq -\frac{\|u\|^2}{\kappa(\kappa - 1)^2}.$$

IDÉE C'est ici que « tous les itérés » deviennent une information nouvelle. Chaque relation transporte l'inconnue m_n vers m_{n+1} . La chaîne entière permet de pousser ce terme arbitrairement loin, puis la pondération κ^{-P} fait disparaître le reste grâce à la bornitude. Avec une seule relation, ce mécanisme de fermeture n'existe pas.

14

Développons

$$u = Q^* V T x - \kappa V x.$$

On obtient

$$\|u\|^2 = \|Q^* V T x\|^2 + \kappa^2 \|V x\|^2 - 2\kappa \operatorname{Re}\langle Q^* V T x, V x \rangle.$$

Comme Q est une contraction, V une isométrie et $\|Tx\| = \kappa$,

$$\|Q^*VTx\|^2 \leq \|VTx\|^2 = \|Tx\|^2 = \kappa^2,$$

et $\|Vx\| = 1$. D'autre part,

$$\langle Q^*VTx, Vx \rangle = \langle V^*Q^*VTx, x \rangle = \frac{1}{2} \langle S_1^*Tx, x \rangle.$$

Ainsi

$$\|u\|^2 \leq 2\kappa^2 - \kappa \operatorname{Re} \langle S_1^*Tx, x \rangle.$$

Or

$$S_1^* = E_1 + T^*.$$

Donc

$$\operatorname{Re} \langle S_1^*Tx, x \rangle = \operatorname{Re} \langle E_1Tx, x \rangle + \langle T^*Tx, x \rangle.$$

Le premier terme vaut m_1 et le second vaut κ^2 . Par conséquent,

$$\boxed{\|u\|^2 \leq 2\kappa^2 - \kappa m_1 - \kappa^3}.$$

15 —

La question 13 donne

$$-\kappa m_1 \leq \frac{\|u\|^2}{(\kappa - 1)^2}.$$

En l'injectant dans la question 14,

$$\|u\|^2 \leq 2\kappa^2 - \kappa^3 + \frac{\|u\|^2}{(\kappa - 1)^2}.$$

Donc

$$\boxed{\|u\|^2 \left(1 - \frac{1}{(\kappa - 1)^2} \right) \leq 2\kappa^2 - \kappa^3}.$$

Supposons $\kappa > 2$. Alors $\kappa - 1 > 1$, donc

$$1 - \frac{1}{(\kappa - 1)^2} > 0.$$

Le membre de gauche est donc positif ou nul. Mais

$$2\kappa^2 - \kappa^3 = \kappa^2(2 - \kappa) < 0,$$

ce qui est impossible. Ainsi $\kappa \leq 2$, c'est-à-dire

$$\boxed{\|T\| \leq 2}.$$

16

(a) Pour un seul indice, la question 11 fournit une relation entre m_n et m_{n+1} . Elle ne donne aucune minoration autonome de m_n : un terme suivant, a priori inconnu, subsiste.

(b) En itérant, ce terme devient

$$\kappa^{-P} m_{P+1}.$$

La bornitude de (m_n) et le fait que $\kappa > 1$ imposent sa convergence vers 0. Sans bornitude, le télescopage pondéré ne fermerait pas l'estimation.

(c) L'information importante n'est donc pas « la relation au rang 1 est un peu meilleure ». La preuve utilise une même structure pour chaque puissance de T , transforme toutes ces relations en une chaîne, les pondère par les puissances de κ^{-1} , puis laisse l'indice tendre vers l'infini. Cette organisation produit la minoration quantitative de m_1 qui manquait. Une fois cette minoration combinée à l'estimation de $\|u\|^2$, toute valeur $\kappa > 2$ devient impossible.

IDÉE C'est le cœur de la nouveauté pédagogique du DM : l'élève a démontré lui-même la spécialisation matricielle du lemme de perturbation de Loring–Schwenninger. Le calcul utilise exactement la famille des E_n , la commutation, la complétion du carré, la suite m_n , le télescopage pondéré et la contradiction finale à $\kappa > 2$.

IV

Le pont analytique admis : retour à $p(A)$

17

Par le choix de Ω ,

$$\sup_{z \in \Omega} |p(z)| \leq M + \varepsilon.$$

Le polynôme

$$f = \frac{p}{M + \varepsilon}$$

vérifie donc

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq 1.$$

Le théorème admis construit pour

$$T = f(A) = \frac{p(A)}{M + \varepsilon}$$

les objets Q , V et (E_n) qui satisfont toutes les hypothèses de la partie III. Celle-ci donne

$$\|T\| \leq 2.$$

Par homogénéité,

$$\boxed{\|p(A)\| \leq 2(M + \varepsilon)}.$$

L'inégalité précédente vaut pour tout $\varepsilon > 0$. En faisant tendre ε vers 0,

$$\|p(A)\| \leq 2M,$$

soit

$$\boxed{\|p(A)\| \leq 2 \max_{z \in W(A)} |p(z)|}.$$

Le cas $M = 0$ ne pose aucune difficulté : on ne divise jamais par M mais par $M + \varepsilon$, puis le passage à la limite donne directement $\|p(A)\| = 0$.

Ce que vous avez réellement démontré

Le sujet ne prétend pas reconstruire de zéro toute la preuve analytique moderne. Vous avez démontré trois morceaux distincts.

- Vous avez retrouvé le cadre de champ numérique et l'exemple 2×2 qui impose la constante 2.
- Vous avez reconstruit l'argument algébrique qui mène à $1 + \sqrt{2}$, dans la formulation de Ransford-Schwenninger de la méthode Crouzeix-Palencia.
- Surtout, vous avez démontré la spécialisation matricielle du lemme central de Lorist-Schwenninger : lorsque toute la famille $E_n = 2V^*Q^{*n}V - T^{*n}$ est disponible, la chaîne sur les m_n force $\|T\| \leq 2$.

La seule grande étape avancée laissée admise est le pont qui, à partir d'un polynôme contrôlé sur un voisinage du champ numérique, construit précisément Q , V et les E_n . Dans l'article de Lorist et Schwenninger, ce pont utilise un potentiel de double couche, une représentation intégrale et le calcul fonctionnel holomorphe. Notre énoncé en extrait uniquement les conséquences effectivement utilisées dans la partie III.

Le contraste historique est particulièrement net. Le 13 avril 2026, l'épreuve X/ENS Mathématiques A MP-MPI consacrait sa dernière partie à Crouzeix et la présentait encore comme une conjecture. Elle démontrait notamment von Neumann, étudiait le champ numérique et le rayon numérique, faisait apparaître l'optimalité de 2 et utilisait Okubo-Ando pour traiter les disques contenant le champ numérique. Le 4 août 2026, Lorist et Schwenninger déposaient une prépublication annonçant une preuve générale. Une prépublication indépendante de Shanmu Jin a également été déposée en 2026. À la date de rédaction de ce DM, ces deux travaux sont à présenter comme des prépublications annoncées, et non comme des articles déjà validés par un processus de publication avec évaluation par les pairs.

Positionnement par rapport au programme MP

Les outils d'algèbre linéaire, les matrices, les valeurs propres, les polynômes de matrices, les espaces normés, la norme subordonnée et les sommes géométriques appartiennent au cadre de MP ou aux acquis de MPSI. Le théorème spectral utilisé sur T^*T est la version hermitienne complexe d'un résultat familier en cadre euclidien réel ; cette extension est fournie dans le sujet.

Le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^d$ est explicitement déclaré hors programme dans le programme officiel de MP. Sont également hors programme, mais introduits de manière élémentaire dans le devoir, l'adjoint complexe, le champ numérique, le rayon numérique et le petit cadre multiplicatif abstrait de la partie II.

Le seul bloc réellement avancé utilisé sans démonstration est le pont analytique de la partie IV : potentiel de double couche, représentation intégrale et calcul fonctionnel holomorphe, condensés dans l'énoncé admis qui construit Q , V et les E_n .

SOURCES

École polytechnique, *Mathématiques A — MP-MPI, concours 2026*, épreuve officielle du 13 avril 2026 : [Lien direct](#).

E. Lorist et F. L. Schwenninger, *A solution to Crouzeix's conjecture*, arXiv:2608.03841v1, 4 août 2026 : [Lien direct](#).

M. Crouzeix et C. Palencia, *The numerical range is a $(1 + \sqrt{2})$ -spectral set*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 38 (2017), 649–655 : [Lien direct](#).

T. Ransford et F. L. Schwenninger, *Remarks on the Crouzeix-Palencia proof that the numerical range is a $(1 + \sqrt{2})$ -spectral set*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 39 (2018), 342–345 : [Lien direct](#).

K. Okubo et T. Ando, *Constants related to operators of class C_ρ* , Manuscripta Mathematica 16 (1975), 385–394 : [Lien direct](#).

S. Jin, *The Numerical Range Is a 2-Spectral Set*, prépublication, version 4 mise en ligne le 7 août 2026 : [Lien direct](#).

Ministère de l'Enseignement supérieur, programme officiel de mathématiques de MP : [Lien direct](#).