

MP · DM

CHAPITRES

De $1 + \sqrt{2}$ à 2 : le dernier pas vers la conjecture de Crouzeix

Champ numérique et conjecture de Crouzeix · Normes d'opérateurs · Polynômes de matrices · Algèbre linéaire et réduction

Pour un nombre complexe z , contrôler $|p(z)|$ suffit à comprendre l'action d'un polynôme p . Pour une matrice A , la quantité $\|p(A)\|$ est beaucoup plus subtile : les valeurs propres ne racontent pas toute l'histoire. Le champ numérique $W(A)$ fournit alors une région du plan complexe qui tient compte à la fois de A et de la géométrie de l'espace. La conjecture de Crouzeix affirme qu'elle contrôle toujours $p(A)$ avec la constante universelle optimale 2. Le 13 avril 2026, la dernière partie de l'épreuve X/ENS Mathématiques A MP-MPI travaillait autour de cette conjecture, encore présentée comme ouverte. Quelques mois plus tard, deux prépublications indépendantes ont annoncé des preuves. À la date de rédaction de ce devoir, ces travaux n'ont pas encore été validés par une publication avec évaluation par les pairs : nous distinguerons donc soigneusement ce qui est démontré dans le devoir de l'unique pont analytique repris de l'une de ces prépublications et admis à la fin. Vous allez repartir presque du point où s'arrêtait Maths A 2026, retrouver la barrière historique $1 + \sqrt{2}$, puis démontrer vous-même le mécanisme nouveau qui fait tomber cette constante à 2 sous les hypothèses de ce pont analytique.

Le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^d$ n'appartient pas au programme officiel de MP ; comme dans Maths A 2026, tout le cadre nécessaire est donc fourni ici. Pour $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$, on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^d x_j \overline{y_j}, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Le produit scalaire est linéaire par rapport à sa première variable et vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, son adjoint est la matrice $A^* = \overline{A}^\top$, caractérisée par

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle.$$

On note encore $\|A\|$ la norme subordonnée :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Une matrice Q est une contraction lorsque $\|Q\| \leq 1$. Une application linéaire $V : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^N$ est une isométrie lorsque $\|Vx\| = \|x\|$ pour tout x . Enfin, pour $p(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$, on pose $p(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k$.

I

Du scalaire à la matrice : le champ numérique

1 Établir les propriétés suivantes, qui seront utilisées tout au long du problème.

- (a) Pour toutes matrices compatibles A et B , montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ et que $\|A^*\| = \|A\|$.
- (b) Montrer que $\|A\|^2 = \|A^* A\|$.
- (c) Si Q est une contraction, montrer que $\|Q^n\| \leq 1$ et $\|Q^{*n}\| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$.
- (d) Si V est une isométrie, montrer, en développant les normes de $V(x + y)$ puis de $V(x + iy)$, que $\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$. En déduire $V^* V = I_d$ puis $\|V\| = \|V^*\| = 1$.

On appelle **champ numérique** de A l'ensemble

$$W(A) = \{ \langle Ax, x \rangle ; \|x\| = 1 \}.$$

Dans le sujet X/ENS Maths A 2026, ce même ensemble est appelé le **Hausdorffien** et noté $\mathcal{H}(A)$. Nous conserverons ici la notation aujourd'hui usuelle $W(A)$.

Son **rayon numérique** est

$$w(A) = \max_{z \in W(A)} |z|.$$

2 Justifier que $W(A)$ est compact et contenu dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\|A\|$. Montrer ensuite que toute valeur propre de A appartient à $W(A)$.

3 On considère

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $\|N\| = 1$.

(b) Pour $x = (u, v) \in \mathbb{C}^2$ de norme 1, exprimer $\langle Nx, x \rangle$ en fonction de u et de v , puis montrer que

$$W(N) = \overline{D}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

(c) En prenant $p(z) = z$, montrer que toute constante universelle C telle que

$$\|p(A)\| \leq C \max_{z \in W(A)} |p(z)|$$

pour toutes matrices A et tous polynômes p vérifie nécessairement $C \geq 2$.

La conjecture formulée par Michel Crouzeix affirme précisément que la valeur optimale est 2 :

$$\boxed{\|p(A)\| \leq 2 \max_{z \in W(A)} |p(z)|}.$$

En avril 2026, Maths A X/ENS établissait plusieurs résultats qui approchent cette inégalité sans encore la démontrer dans toute sa généralité. Nous allons retrouver l'un de ses derniers mécanismes.

On admet ici l'**inégalité de von Neumann**, démontrée dans cette épreuve : si C est une contraction, alors, pour tout polynôme p ,

$$\|p(C)\| \leq \max_{|z| \leq 1} |p(z)|.$$

On admet également le résultat d'**Okubo-Ando** utilisé dans la dernière question de Maths A 2026 : si $w(B) \leq 1$, il existe une matrice inversible X telle que

$$\|X\| \|X^{-1}\| \leq 2 \quad \text{et} \quad X^{-1}BX$$

soit une contraction.

4 Soit $D = \overline{D}(c, R)$ un disque contenant $W(A)$, avec $R > 0$.

(a) Montrer que $w((A - cI)/R) \leq 1$.

(b) À l'aide des deux résultats admis ci-dessus, montrer que, pour tout polynôme p ,

$$\|p(A)\| \leq 2 \max_{z \in D} |p(z)|.$$

(c) Expliquer précisément pourquoi ce résultat ne démontre pas encore la conjecture de Crouzeix.

Nous disposons donc déjà de la bonne constante dès que le champ numérique peut être remplacé par un disque qui le contient. Le problème réel est de conserver la géométrie exacte de $W(A)$. Pendant près d'une décennie, la meilleure constante générale connue fut $1 + \sqrt{2}$. Pour comprendre ce qui manquait, nous allons d'abord voir comment cette constante apparaît presque inévitablement lorsqu'on n'exploite qu'une seule relation auxiliaire.

II

Avant 2026 : la barrière $1 + \sqrt{2}$

On considère un ensemble $\mathcal{A}$ de fonctions complexes, stable par produit, muni d'une norme $\|\cdot\|_\infty$ telle que

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

On dispose d'une application linéaire multiplicative

$$\Theta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \quad \Theta(fg) = \Theta(f)\Theta(g),$$

et l'on note

$$K = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|\Theta(f)\|.$$

On suppose $K < +\infty$. Enfin, on suppose que pour tout $f \in \mathcal{A}$ tel que $\|f\|_\infty \leq 1$, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que

$$\|g\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \|\Theta(f) + \Theta(g)^*\| \leq 2.$$

Ce cadre abstrait isole la partie algébrique de l'ancienne preuve. L'analyse complexe servant historiquement à produire g n'est pas nécessaire pour les questions qui suivent.

5 Soit $f \in \mathcal{A}$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$ et choisissons g comme ci-dessus. Montrer l'identité

$$\begin{aligned} & \Theta(f)\Theta(f)^*\Theta(f)\Theta(f)^* \\ &= \Theta(f)(\Theta(f) + \Theta(g)^*)^*\Theta(f)\Theta(f)^* - \Theta(fgf)\Theta(f)^*. \end{aligned}$$

6 En déduire que

$$\|\Theta(f)\|^4 \leq 2K^3 + K^2.$$

On prendra soin de justifier séparément le contrôle de $\|\Theta(fgf)\|$.

7 En passant à la borne supérieure sur les f de norme au plus 1, montrer que

$$K^4 \leq 2K^3 + K^2,$$

puis que

$$\boxed{K \leq 1 + \sqrt{2}}.$$

La constante $1 + \sqrt{2}$ n'est donc pas le résultat d'un calcul maladroit : elle est déjà inscrite dans cette utilisation d'une seule relation entre f et un compagnon g . La preuve historique contient davantage de structure, mais l'argument ci-dessus ne la fait pas communiquer entre les différents itérés $f, f^2, f^3, \dots$

La question naturelle devient alors : **que gagne-t-on si l'on utilise simultanément les relations correspondant à tous les itérés ?** Le cœur de la preuve de Lorist et Schwenninger annoncée en août 2026 répond exactement à cette question.

III 2026 : utiliser tous les itérés

Dans toute cette partie, $T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un espace hermitien auxiliaire $\mathcal{K}$, éventuellement de dimension infinie, une contraction Q sur $\mathcal{K}$ et une isométrie $V : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathcal{K}$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$, l'opérateur sur $\mathbb{C}^d$

$$E_n = 2V^*Q^{*n}V - T^{*n}$$

commute avec T . On suppose en outre la famille $(E_n)_{n \geq 1}$ uniformément bornée : il existe $M > 0$ tel que $\|E_n\| \leq M$ pour tout n .

L'objectif est de démontrer, sans autre résultat avancé, que

$$\|T\| \leq 2.$$

Lorsque $\mathcal{K}$ est de dimension infinie, le symbole $*$ désigne l'adjoint caractérisé par la même identité de produit scalaire que dans $\mathbb{C}^d$. On pourra utiliser pour Q et V les propriétés de norme établies à la question 1 ; leur démonstration est identique et n'emploie aucun autre résultat de théorie des opérateurs.

On pourra utiliser le théorème spectral pour la matrice hermitienne positive T^*T : elle possède une base orthonormée de vecteurs propres et ses valeurs propres sont réelles positives.

- 8 Posons $\kappa = \|T\|$. Montrer que $\|T^*T\| = \kappa^2$ et qu'il existe un vecteur unitaire $x \in \mathbb{C}^d$ tel que

$$T^*Tx = \kappa^2 x.$$

Dans la suite, on suppose $\kappa > 1$; le cas $\kappa \leq 1$ ne nécessite évidemment rien de plus.

- 9 Pour $n \geq 1$, posons

$$S_n^* = 2V^*Q^{*n}V, \quad m_n = \operatorname{Re}\langle E_n T^n x, x \rangle.$$

- (a) Montrer que $\|S_n^*\| \leq 2$.
 - (b) À partir de $T^{*n} = S_n^* - E_n$, montrer que la suite $(\|T^n\|)_{n \geq 1}$ est bornée.
 - (c) En déduire que la suite réelle (m_n) est bornée.
- 10 Montrer, en signalant précisément l'endroit où la commutation de E_n avec T est utilisée, que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \kappa m_n - m_{n+1} &= (\kappa^2 - \kappa) \|T^{*n}x\|^2 \\ &\quad - \operatorname{Re}\langle T^n(S_{n+1}^*T - \kappa S_n^*)x, x \rangle. \end{aligned}$$

- 11 On pose

$$y_n = (S_{n+1}^*T - \kappa S_n^*)x.$$

- (a) Réécrire le dernier produit scalaire de la question 10 sous la forme

$$\operatorname{Re}\langle y_n, T^{*n}x \rangle.$$

- (b) En complétant le carré, montrer que

$$\kappa m_n - m_{n+1} \geq -\frac{\|y_n\|^2}{4(\kappa^2 - \kappa)}.$$

12 Posons

$$u = Q^*VTx - \kappa Vx.$$

(a) Montrer que

$$y_n = 2V^*Q^{*n}u.$$

(b) En déduire

$$\|y_n\| \leq 2\|u\|$$

puis

$$\kappa m_n - m_{n+1} \geq -\frac{\|u\|^2}{\kappa^2 - \kappa}.$$

13 Montrer par récurrence que, pour tout $P \geq 1$,

$$m_1 \geq \kappa^{-P} m_{P+1} - \frac{\|u\|^2}{\kappa^2 - \kappa} \sum_{n=1}^P \kappa^{-n}.$$

Puis faire tendre P vers $+\infty$ et obtenir

$$m_1 \geq -\frac{\|u\|^2}{\kappa(\kappa - 1)^2}.$$

14 Développer $\|u\|^2$. En utilisant successivement que Q est une contraction, que V est une isométrie, que $\|Tx\| = \kappa$ et que

$$S_1^* = E_1 + T^*,$$

montrer que

$$\|u\|^2 \leq 2\kappa^2 - \kappa m_1 - \kappa^3.$$

15 Combiner les deux encadrements précédents pour démontrer

$$\|u\|^2 \left(1 - \frac{1}{(\kappa - 1)^2}\right) \leq 2\kappa^2 - \kappa^3.$$

En déduire qu'il est impossible d'avoir $\kappa > 2$, puis conclure :

$$\|T\| \leq 2.$$

16 Revenir sur l'architecture de la preuve.

- (a) Pourquoi l'inégalité obtenue à la question 11 pour un seul indice n ne suffit-elle pas, à elle seule, à contrôler correctement m_1 ?
- (b) Quel rôle précis joue la bornitude de (m_n) dans le passage de la question 13 ?
- (c) Expliquer en quelques lignes pourquoi l'utilisation simultanée de toute la famille des itérés est le mécanisme qui permet ici d'atteindre 2.

Vous venez de démontrer le cœur élémentaire du nouvel argument : la spécialisation matricielle du lemme de perturbation de Lorist–Schwenninger. Ce résultat ne parle pourtant encore que d'un opérateur T auquel sont associés Q , V et toute la famille (E_n) . Il reste à comprendre pourquoi, lorsque $T = p(A)$ et que p est contrôlé sur $W(A)$, de tels objets existent. C'est précisément là que la prépublication récente utilise une analyse complexe et une théorie des opérateurs qui dépassent nettement le programme de MP.

IV Le pont analytique admis : retour à $p(A)$

Statut scientifique du pont admis. Le résultat utilisé dans cette partie est une spécialisation du pont analytique proposé par Lorist et Schwenninger dans leur prépublication déposée sur arXiv le 4 août 2026. Au 20 août 2026, ce travail est toujours une prépublication et n'a pas encore fait l'objet d'une publication avec évaluation par les pairs. Les questions 8 à 16 démontrent intégralement, dans le cadre du devoir, le mécanisme algébrique qui transforme les hypothèses ci-dessous en la constante 2 ; elles ne constituent en revanche ni une vérification indépendante complète de toute l'analyse avancée qui produit ces hypothèses, ni l'équivalent d'une revue par les pairs. Les questions 17 et 18 doivent donc être lues conditionnellement : **en admettant la validité du pont analytique suivant**, on obtient l'inégalité de Crouzeix.

Résultat admis — issu d'une prépublication non encore évaluée par les pairs. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et soit Ω un ouvert borné convexe à bord suffisamment régulier contenant $W(A)$. Si f est un polynôme tel que

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq 1,$$

alors, pour $T = f(A)$, il existe un espace hermitien auxiliaire $\mathcal{K}$, une contraction Q sur $\mathcal{K}$, une isométrie $V : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathcal{K}$ et une famille uniformément bornée $(E_n)_{n \geq 1}$ d'opérateurs sur $\mathbb{C}^d$ telle que

$$E_n = 2V^*Q^{*n}V - T^{*n}$$

et que chaque E_n commute avec T .

On admet aussi le fait d'approximation géométrique suivant, inclus ici dans le même pont analytique : pour tout polynôme p et tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir un tel ouvert Ω contenant $W(A)$ de sorte que

$$\sup_{z \in \Omega} |p(z)| \leq \max_{z \in W(A)} |p(z)| + \varepsilon.$$

Dans la prépublication de recherche, ces conclusions proviennent notamment d'un potentiel de double couche, d'une représentation intégrale et du calcul fonctionnel holomorphe. Aucune connaissance de ces notions n'est nécessaire ici : ce résultat admis est le seul grand pont analytique du devoir.

17 Soit p un polynôme et posons

$$M = \max_{z \in W(A)} |p(z)|.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons Ω comme dans le résultat admis. En appliquant la partie III au polynôme

$$f = \frac{p}{M + \varepsilon},$$

montrer que

$$\|p(A)\| \leq 2(M + \varepsilon).$$

- 18** En admettant le pont analytique ci-dessus, faire tendre ε vers 0 et obtenir l'inégalité de Crouzeix pour les matrices de dimension finie et les polynômes :

$$\boxed{\|p(A)\| \leq 2 \max_{z \in W(A)} |p(z)|}.$$

Le point de départ était un sujet de concours d'avril 2026 qui s'arrêtait encore devant une conjecture ouverte. Le point d'arrivée est le mécanisme décisif proposé quelques mois plus tard : l'ancienne estimation exploite une relation isolée et conduit à $1 + \sqrt{2}$; le nouvel argument fait communiquer toutes les relations obtenues par les itérés, les pondère, les somme et fait disparaître un reste grâce à leur bornitude. Ce mécanisme est entièrement démontré dans la partie III. Le passage final de ce mécanisme à $p(A)$ sur le champ numérique dépend, lui, du pont analytique annoncé dans la prépublication de Lorist–Schwenninger ; son statut scientifique externe reste donc explicitement provisoire tant que ce travail n'a pas reçu une validation indépendante suffisante, notamment par le processus de publication et d'évaluation par les pairs.