

CORRIGÉ

MP · MPI · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°03 — Décalages cycliques, matrices circulantes et transformée de Fourier

Réduction d'endomorphismes ·
Matrices circulantes · Transformée
de Fourier discrète · Convolution
cyclique · Principe d'incertitude
discret

Comme dans le sujet, les coordonnées sont numérotées de 0 à $n-1$ et tout indice de coordonnée est ramené modulo n ; ainsi, par exemple, $x_{-1} = x_{n-1}$ et $x_n = x_0$. On conserve

$$\omega = e^{2i\pi/n}.$$

I Le spectre d'un décalage cyclique

1

L'application T est linéaire puisqu'elle ne fait que permuter les coordonnées. Après un décalage, chaque coordonnée avance d'une position ; après n décalages, chaque coordonnée retrouve sa place. Ainsi

$$T^n = \text{Id}_E.$$

En particulier, T est inversible et

$$T^{-1} = T^{n-1}.$$

Si λ est une valeur propre de T et si $x \neq 0$ vérifie $Tx = \lambda x$, alors

$$x = T^n x = \lambda^n x.$$

Comme $x \neq 0$,

$$\lambda^n = 1.$$

Toute valeur propre éventuelle est donc une racine n -ième de l'unité.

2

Soit $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \neq 0$ tel que $Tx = \lambda x$. Les égalités coordonnées par coordonnées donnent

$$x_{r-1} = \lambda x_r, \quad 1 \leq r \leq n-1,$$

et

$$x_{n-1} = \lambda x_0.$$

Comme $\lambda^n = 1$, on a $\lambda \neq 0$. Les premières relations donnent alors

$$x_r = \lambda^{-r} x_0.$$

Si $x_0 = 0$, toutes les coordonnées seraient nulles ; donc $x_0 \neq 0$. Les racines n -ièmes de l'unité sont $1, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \dots, \omega^{-(n-1)}$.

Pour $0 \leq k \leq n-1$, prenons

$$\lambda_k = \omega^{-k}.$$

L'espace propre associé est alors la droite engendrée par

$$v_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k}).$$

Réciproquement, un calcul direct donne bien

$$Tv_k = \omega^{-k}v_k.$$

Les nombres ω^{-k} , pour $0 \leq k \leq n-1$, sont deux à deux distincts. L'endomorphisme T possède donc n valeurs propres distinctes dans un espace de dimension n . Il est diagonalisable et

$$(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$$

est une base de E .

3

Si n divise m , alors $\omega^m = 1$ et

$$S_m = \sum_{r=0}^{n-1} 1 = n.$$

Supposons maintenant que n ne divise pas m . Alors $\omega^m \neq 1$ et la somme géométrique donne

$$S_m = \frac{1 - (\omega^m)^n}{1 - \omega^m} = \frac{1 - \omega^{mn}}{1 - \omega^m} = 0.$$

Ainsi

$$\sum_{r=0}^{n-1} \omega^{mr} = \begin{cases} n & \text{si } n \mid m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II Les opérateurs invariants par décalage

4

Comme

$$e_r = T^r e_0,$$

l'action de A sur e_0 détermine son action sur toute la base canonique. Écrivons

$$Ae_0 = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e_j.$$

Pour tout r , on a $Ae_r = A(T^r e_0) = T^r(Ae_0) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e_{j+r}$.

D'autre part, $\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j\right) e_r = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e_{j+r}$.

Les deux endomorphismes coïncident donc sur une base, d'où

$$A = \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j.$$

L'unicité vient de l'égalité

$$Ae_0 = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e_j,$$

qui détermine les coefficients a_j de manière unique.

Réciproquement, toute combinaison linéaire de $I, T, \dots, T^{n-1}$ commute avec T .

Pour la matrice de A , le coefficient situé à la ligne r et à la colonne s est le coefficient de e_r dans Ae_s . Or

$$Ae_s = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e_{j+s}.$$

Le terme e_r correspond à l'unique $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $j \equiv r-s \pmod{n}$. Ainsi, si l'on note $[r-s]_n$ ce représentant,

$$A_{r,s} = a_{[r-s]_n}.$$

Chaque colonne s'obtient donc par décalage cyclique de la précédente : c'est bien la structure d'une matrice circulante.

5

D'après la question 2,

$$T^j v_k = (\omega^{-k})^j v_k = \omega^{-jk} v_k.$$

Par conséquent,

$$Av_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j v_k = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-jk} \right) v_k.$$

La valeur propre associée à v_k est donc

$$\hat{a}_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega^{-jk}.$$

C'est précisément la formule qui conduira à la transformée de Fourier discrète.

6

La base $(v_0, \dots, v_{n-1})$ dépend uniquement de T , et non des coefficients a_j . Toute matrice circulante est donc diagonale dans cette même base, avec diagonale

$$(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-1}).$$

Un endomorphisme diagonal est inversible si et seulement si aucun coefficient diagonal n'est nul. Ainsi

$$A \text{ est inversible} \iff \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \hat{a}_k \neq 0.$$

III Le changement de base de Fourier

7

Par définition de $\mathcal{F}$,

$$(\mathcal{F}x)_k = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-kj} x_j = \hat{x}_k.$$

Donc

$$\hat{x} = \mathcal{F}x.$$

Posons

$$\mathcal{G} = (\omega^{jk})_{0 \leq j, k \leq n-1}.$$

Le coefficient situé à la ligne r et à la colonne s de $\mathcal{G}\mathcal{F}$ vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} \omega^{-ks} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(r-s)k}.$$

D'après la question 3, cette somme vaut n si $r = s$ et 0 sinon. Ainsi

$$\mathcal{G}\mathcal{F} = nI_n.$$

Comme $\mathcal{F}$ est carrée,

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{n} \mathcal{G} = \frac{1}{n} (\omega^{jk})_{0 \leq j, k \leq n-1}.$$

On obtient alors

$$x = \mathcal{F}^{-1} \hat{x},$$

c'est-à-dire, pour chaque j ,

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}_k \omega^{jk}.$$

8

La coordonnée d'indice j de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}_k v_k$ vaut $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}_k \omega^{jk}$, c'est-à-dire x_j par la formule d'inversion. Ainsi

$$x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}_k v_k.$$

Les coordonnées de x dans la base propre (v_k) sont donc

$$\frac{\widehat{x}_0}{n}, \dots, \frac{\widehat{x}_{n-1}}{n}.$$

Pour Parseval, développons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{x}_k|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{-jk} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \overline{x_\ell} \omega^{\ell k} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} x_j \overline{x_\ell} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(\ell-j)k}. \end{aligned}$$

La somme intérieure vaut n lorsque $j = \ell$ et 0 sinon. Il reste donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{x}_k|^2 = n \sum_{j=0}^{n-1} |x_j|^2.$$

IV De la matrice circulante à la convolution

9

Comme $(T^j x)_r = x_{r-j}$, on obtient directement

$$(C_a x)_r = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_{r-j}.$$

C'est donc bien la formule $(a * x)_r = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_{r-j}$ annoncée pour la convolution cyclique.

D'après la question 8, $x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{x}_k v_k$, tandis que la question 5 donne $C_a v_k = \widehat{a}_k v_k$. Par conséquent,

$$a * x = C_a x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{x}_k \widehat{a}_k v_k.$$

Par unicité des coordonnées dans la base (v_k) , les coefficients de Fourier de $a * x$ sont

$$\widehat{a * x}_k = \widehat{a}_k \widehat{x}_k.$$

La convolution dans la base canonique devient donc une multiplication coordonnée par coordonnée dans la base de Fourier.

10

Pour tout k , $T v_k = \omega^{-k} v_k$ et $T^{-1} v_k = \omega^k v_k$. Ainsi

$$L v_k = (2 - \omega^{-k} - \omega^k) v_k.$$

(a) Comme $\omega^k + \omega^{-k} = 2 \cos(2\pi k/n)$, la valeur propre correspondante est

$$\lambda_k = 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right).$$

Cette écriture montre immédiatement que λ_k est réelle et positive ou nulle. Ainsi

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi k}{n} \right) \geq 0.$$

(b) Pour $0 \leq k \leq n-1$, on a $\lambda_k = 0$ si et seulement si $k = 0$. Ainsi $\ker L = \text{Vect}(v_0)$ et, comme $v_0 = (1, 1, \dots, 1)$,

$$\ker L = \text{Vect}(1, 1, \dots, 1).$$

(c) Appliquons la transformée de Fourier à l'équation $Lx = b$. D'après la diagonalisation obtenue en (a), pour chaque k on a $\widehat{Lx}_k = \lambda_k \widehat{x}_k$. L'équation $Lx = b$ équivaut donc à

$$\lambda_k \widehat{x}_k = \widehat{b}_k, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Pour $k \neq 0$, $\lambda_k > 0$, donc $\widehat{x}_k = \widehat{b}_k / \lambda_k$. Pour $k = 0$, l'équation devient $0 = \widehat{b}_0$, avec $\widehat{b}_0 = \sum_{j=0}^{n-1} b_j$.

Ainsi

$$Lx = b \text{ admet une solution} \iff \sum_{j=0}^{n-1} b_j = 0.$$

Lorsque cette condition est satisfaite, les coefficients $\widehat{x}_k$ sont imposés pour $k \neq 0$, tandis que $\widehat{x}_0$ est arbitraire. Deux solutions diffèrent donc d'un élément de $\ker L$, c'est-à-dire d'un vecteur constant.

Si x_* est une solution particulière,

$$\{x \in E : Lx = b\} = x_* + \text{Vect}(1, \dots, 1).$$

V Peut-on être concentré dans les deux bases ?

11

Posons

$$S = \text{supp } x, \quad s = |S|,$$

et

$$R = \text{supp } \widehat{x}, \quad r = |R|.$$

Comme $x \neq 0$, on a $s \geq 1$. La transformée de Fourier étant inversible, $\widehat{x} \neq 0$ et donc $r \geq 1$.

Pour tout k , $|\widehat{x}_k| = \left| \sum_{j \in S} x_j \omega^{-jk} \right| \leq \sum_{j \in S} |x_j|$.

En appliquant Cauchy-Schwarz aux deux familles réelles $(|x_j|)_{j \in S}$ et $(1)_{j \in S}$,

$$\left(\sum_{j \in S} |x_j| \right)^2 \leq s \sum_{j \in S} |x_j|^2 = s \|x\|_2^2.$$

Par conséquent,

$$|\hat{x}_k|^2 \leq s \|x\|_2^2.$$

Seuls les indices de R contribuent à $\|\hat{x}\|_2^2$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\hat{x}_k|^2 = \sum_{k \in R} |\hat{x}_k|^2 \leq rs \|x\|_2^2.$$

D'autre part, Parseval donne $n \|x\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{x}_k|^2$.

Donc

$$n \|x\|_2^2 \leq rs \|x\|_2^2.$$

Comme $x \neq 0$, $\|x\|_2^2 > 0$ et l'on peut simplifier :

$$|\text{supp } x| |\text{supp } \hat{x}| \geq n.$$

12

Comme $q = n/d$, les indices de $\{0, \dots, n-1\}$ divisibles par q sont $0, q, 2q, \dots, (d-1)q$. Il y en a exactement d , donc $|\text{supp } x| = d$.

Pour tout k , $\hat{x}_k = \sum_{m=0}^{d-1} \omega^{-mqk}$. Or $\omega^q = e^{2i\pi/d}$, donc $\hat{x}_k = \sum_{m=0}^{d-1} e^{-2i\pi mk/d}$. Cette somme vaut d si d divise k , et 0 sinon. Ainsi

$$\hat{x}_k = \begin{cases} d & \text{si } d \mid k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans $\{0, \dots, n-1\}$, les multiples de d sont $0, d, 2d, \dots, (q-1)d$. Il y en a $q = n/d$, donc $|\text{supp } \hat{x}| = n/d$. Finalement, $|\text{supp } x| |\text{supp } \hat{x}| = d(n/d) = n$.

L'égalité est donc atteinte. Si n est composé, tout diviseur non trivial $1 < d < n$ fournit un exemple où les deux supports ont strictement moins de n éléments tout en saturant exactement le principe d'incertitude.

Le même changement de base relie ainsi la réduction d'un endomorphisme, la diagonalisation simultanée des matrices circulantes, la convolution cyclique et la concentration des vecteurs. La transformée de Fourier discrète n'est pas ici une formule isolée : elle est le système de coordonnées naturellement adapté au décalage cyclique.