

DM n°03 — Décalages cycliques, matrices circulantes et transformée de Fourier

Réduction d'endomorphismes ·
Matrices circulantes · Transformée
de Fourier discrète · Convolution
cyclique · Principe d'incertitude
discret

Sur un cycle de n positions, décaler toutes les coordonnées d'un cran ne change aucune relation qui dépend seulement des écarts de position. Cette symétrie impose une base remarquable : dans cette base, le décalage devient diagonal, puis tout opérateur qui lui est invariant se réduit à n multiplications indépendantes. On fera apparaître cette base à partir du problème spectral lui-même, avant d'en tirer la transformée de Fourier discrète, la convolution cyclique et une limite à la concentration simultanée d'un vecteur et de ses coefficients de Fourier.

Dans tout le problème, $n \geq 2$, $E = \mathbb{C}^n$, et les coordonnées sont numérotées de 0 à $n - 1$. Lorsqu'un indice de coordonnée sort de cet intervalle, il est ramené modulo n : par exemple, $x_{-1} = x_{n-1}$ et $x_n = x_0$. On pose

$$T(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_{n-1}, x_0, \dots, x_{n-2})$$

et

$$\omega = e^{2i\pi/n}.$$

I Le spectre d'un décalage cyclique

- 1 Montrer que T est un automorphisme de E et que

$$T^n = \text{Id}_E.$$

Que peut-on déjà en déduire sur une éventuelle valeur propre de T ?

- 2 Déterminer, sans calculer de déterminant, toutes les valeurs propres de T et les espaces propres correspondants. En déduire que T est diagonalisable et faire apparaître explicitement une base propre

$$(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}).$$

On choisira les vecteurs v_k de sorte que leur première coordonnée soit égale à 1.

- 3 Pour $m \in \mathbb{Z}$, calculer

$$S_m = \sum_{r=0}^{n-1} \omega^{mr}$$

en distinguant les cas où n divise m ou non.

II Les opérateurs invariants par décalage

On note $(e_0, \dots, e_{n-1})$ la base canonique de E .

- 4 Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$AT = TA.$$

Montrer qu'il existe un unique n -uplet $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$A = a_0I + a_1T + \dots + a_{n-1}T^{n-1}.$$

Exprimer alors le coefficient de la matrice de A situé à la ligne r et à la colonne s en fonction des a_j . Une telle matrice sera appelée **matrice circulante**.

- 5 Pour $0 \leq k \leq n-1$, déterminer la valeur propre de A associée au vecteur propre v_k construit à la question 2. On notera cette valeur propre $\hat{a}_k$.
- 6 En déduire que toutes les matrices circulantes sont diagonalisées par la même base. Caractériser l'inversibilité de A à l'aide des nombres

$$\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-1}.$$

III Le changement de base de Fourier

Pour $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in E$, on définit désormais

$$\hat{x}_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{-jk}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Le vecteur $\hat{x} = (\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{n-1})$ est appelé **transformée de Fourier discrète** de x .

- 7 Soit

$$\mathcal{F} = (\omega^{-kj})_{0 \leq k, j \leq n-1}.$$

Montrer que $\hat{x} = \mathcal{F}x$, puis déterminer $\mathcal{F}^{-1}$. En déduire la formule d'inversion

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}_k \omega^{jk}.$$

- 8 Relier les nombres $\hat{x}_k$ aux coordonnées de x dans la base propre $(v_0, \dots, v_{n-1})$. Puis démontrer l'identité de Parseval

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\hat{x}_k|^2 = n \sum_{j=0}^{n-1} |x_j|^2.$$

IV De la matrice circulante à la convolution

- 9 Pour $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in E$, on pose

$$C_a = \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j.$$

Calculer la coordonnée d'indice r de $C_a x$. On note alors $a * x = C_a x$ et l'on appelle $a * x$ la **convolution cyclique** de a et x .

Montrer que, pour tout k , $\widehat{a * x_k} = \widehat{a_k} \widehat{x_k}$.

10 On considère l'endomorphisme

$$L = 2I - T - T^{-1}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres de L dans la base $(v_0, \dots, v_{n-1})$. Montrer qu'elles sont réelles et positives ou nulles.

(b) Déterminer $\ker L$.

(c) Pour $b \in E$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$Lx = b$$

admette une solution. Lorsque cette condition est satisfaite, décrire toutes les solutions.

V Peut-on être concentré dans les deux bases ?

Pour $x \in E$, on note

$$\text{supp } x = \{j \in \{0, \dots, n-1\} : x_j \neq 0\}$$

et

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

11 Soit $x \neq 0$. En utilisant l'identité de Parseval et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer le **principe d'incertitude discret**

$$|\text{supp } x| |\text{supp } \widehat{x}| \geq n.$$

12 Soit d un diviseur de n et $q = n/d$. On définit $x \in E$ par

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } q \text{ divise } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer $\widehat{x}$, puis les cardinalités de $\text{supp } x$ et de $\text{supp } \widehat{x}$. En déduire que l'inégalité de la question 11 peut être une égalité. Que donnent en particulier les diviseurs non triviaux lorsque n est composé ?

Synthèse. La formule d'inversion montre que les coordonnées de x dans la base propre $(v_0, \dots, v_{n-1})$ du décalage cyclique T sont $\widehat{x_k}/n$. Dans cette base, T est diagonal. Les endomorphismes qui commutent avec T sont exactement les matrices circulantes ; ils sont donc diagonaux dans la même base. Pour $C_a = \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j$, les nombres $\widehat{a_k}$ sont les valeurs propres de C_a , et l'identité $\widehat{a * x_k} = \widehat{a_k} \widehat{x_k}$ montre que la convolution cyclique devient une multiplication terme à terme après transformée de Fourier. Lorsque n se factorise, cette structure permet aussi de décomposer le calcul de la transformée en calculs plus petits et de réduire le nombre d'opérations : c'est le principe des algorithmes de transformée de Fourier rapide.