

CORRIGÉ

MP · CORRIGÉ

CHAPITRES

Diviser par zéro : vraiment impossible ?

Division par zéro · Fractions et classes d'équivalence · Wheels et lois algébriques · Espaces vectoriels de dimension 2 · Lois de composition

Le point essentiel du problème est de distinguer deux affirmations : dans un corps non trivial, 0 ne peut pas avoir d'inverse multiplicatif ; mais on peut agrandir l'univers et modifier certaines identités de façon cohérente pour rendre le réciproque total. La construction ci-dessous est la spécialisation à $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ d'une wheel de fractions.

I Ce que « impossible » signifie vraiment

1

(a) Pour tout $x \in K$, la distributivité donne

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x.$$

En ajoutant l'opposé de $0x$ aux deux membres, on obtient

$$0 = 0x.$$

Ainsi $0x = 0$ pour tout $x \in K$.

(b) S'il existait $u \in K$ tel que $0u = 1$, la question précédente donnerait simultanément $0u = 0$ et $0u = 1$, donc $0 = 1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(c) La démonstration de (a) n'a utilisé que la distributivité et l'existence des opposés pour l'addition. Dès lors, une structure non triviale qui conserverait ces propriétés ne pourrait pas imposer $0u = 1$. Pour rendre le réciproque total, il faudra donc éviter de demander que le réciproque de 0 soit un inverse multiplicatif au sens habituel, ou modifier certaines lois algébriques.

2

(a) Pour tout $(a, b) \in K^2$, on a $ab = ba$, donc $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$: la relation est réflexive. Si $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$, alors $ad = bc$, donc $cb = da$ par commutativité, et ainsi $(c, d)\mathcal{R}(a, b)$: elle est symétrique.

(b) Posons

$$u = (1, 0), \quad v = (0, 0), \quad w = (0, 1).$$

On a $u\mathcal{R}v$ car $1 \times 0 = 0 \times 0$, et $v\mathcal{R}w$ car $0 \times 1 = 0 \times 0$. En revanche,

$$1 \times 1 \neq 0 \times 0,$$

si bien que u n'est pas en relation avec w . La relation $\mathcal{R}$ n'est donc pas transitive.

(c) Le couple $(0, 0)$ satisfait automatiquement l'égalité du produit en croix avec tout couple : pour tout (a, b) ,

$$0 \cdot b = 0 \cdot a.$$

Il se trouve donc relié à tous les couples, alors que deux couples quelconques ne sont pas nécessairement reliés entre eux. C'est précisément ce qui détruit la transitivité.

IDÉE Le problème n'est pas « le dénominateur zéro » à lui seul : le couple nul est le point où la règle $ad = bc$ cesse de distinguer des directions différentes.

II Des fractions qui gardent leur direction

3

(a) La relation $\sim$ est réflexive car $(a, b) = 1 \cdot (a, b)$ et $1 \in K^*$. Elle est symétrique : si $(c, d) = \lambda(a, b)$ avec $\lambda \in K^*$, alors $(a, b) = \lambda^{-1}(c, d)$ avec $\lambda^{-1} \in K^*$. Enfin, elle est transitive : si $(c, d) = \lambda(a, b)$ et $(e, f) = \mu(c, d)$ avec $\lambda, \mu \in K^*$, alors $(e, f) = \mu\lambda(a, b)$ et $\mu\lambda \in K^*$. C'est donc une relation d'équivalence.

(b) Si $(c, d) = \lambda(a, b)$ avec $\lambda \neq 0$, alors $ad = a(\lambda b) = \lambda ab = (\lambda a)b = bc$.

Réciproquement, supposons (a, b) et (c, d) non nuls et $ad = bc$.

Si $b \neq 0$, alors $d \neq 0$: sinon $bc = 0$, donc $c = 0$, ce qui donnerait $(c, d) = (0, 0)$. En posant $\lambda = d/b \in K^*$, on a, grâce à $ad = bc$,

$$\lambda a = \frac{ad}{b} = c, \quad \lambda b = d.$$

Donc $(c, d) = \lambda(a, b)$.

Si $b = 0$, alors $a \neq 0$. L'égalité $ad = bc = 0$ donne $d = 0$. Comme (c, d) est non nul, $c \neq 0$; avec $\lambda = c/a \in K^*$, on obtient encore $(c, d) = \lambda(a, b)$.

Ainsi, pour deux couples non nuls,

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

(c) Si $(a, b) \sim (0, 0)$, il existe $\lambda \in K^*$ tel que $(0, 0) = \lambda(a, b)$. Comme $\lambda \neq 0$, cela impose $a = b = 0$. La classe de $(0, 0)$ est donc le singleton $\{(0, 0)\}$.

4

(a) Si $b \neq 0$, alors

$$\left(\frac{a}{b}, 1\right) = \frac{1}{b}(a, b),$$

avec $1/b \in K^*$. Ainsi

$$[a, b] = \left[\frac{a}{b}, 1\right] = \iota\left(\frac{a}{b}\right).$$

Pour l'unicité, si $[t, 1] = [s, 1]$, il existe $\lambda \in K^*$ tel que $(s, 1) = \lambda(t, 1)$. La seconde coordonnée donne $1 = \lambda$, puis la première donne $s = t$.

(b) Si $a \neq 0$, $(1, 0) = (1/a)(a, 0)$, donc $[a, 0] = [1, 0]$. Tous les couples non nuls de la forme $(a, 0)$ définissent la même classe.

(c) La classe $[1, 0]$ ne peut être égale à un $[t, 1]$, car une multiplication par un scalaire non nul ne peut transformer une seconde coordonnée nulle en une seconde coordonnée égale à 1. De même, $[0, 0]$ est une classe singleton d'après 3(c), donc elle est distincte de $[1, 0]$ et de tous les $[t, 1]$.

(d) Tout couple (a, b) relève exactement d'un des trois cas :

- si $b \neq 0$, sa classe est un unique $\iota(t)$;
- si $b = 0$ et $a \neq 0$, sa classe est $\infty = [1, 0]$;
- si $a = b = 0$, sa classe est $\perp = [0, 0]$.

Ces trois parties sont deux à deux disjointes. Par conséquent,

$$W = \iota(K) \sqcup \{\infty\} \sqcup \{\perp\}.$$

5

(a) Si $[a, b] = [c, d] \neq \perp$, il existe $\lambda \in K^*$ tel que $(c, d) = \lambda(a, b)$. Or multiplier un vecteur non nul par un scalaire non nul ne change pas la droite vectorielle qu'il engendre :

$$\text{Vect}(c, d) = \text{Vect}(\lambda a, \lambda b) = \text{Vect}(a, b).$$

Ainsi L est bien définie.

(b) Soit $D \in \mathcal{D}$. Comme D est de dimension 1, il existe un vecteur non nul (a, b) qui l'engendre. Alors $[a, b] \neq \perp$ et $L([a, b]) = D$. Donc L est surjective.

Supposons maintenant $L([a, b]) = L([c, d])$ avec les deux couples non nuls. Les deux vecteurs engendrent la même droite, donc il existe $\lambda \in K^*$ tel que $(c, d) = \lambda(a, b)$. Ainsi $[a, b] = [c, d]$. L'application L est injective, donc bijective.

(c) Pour $t \in K$,

$$L(\iota(t)) = \text{Vect}(t, 1),$$

alors que

$$L(\infty) = \text{Vect}(1, 0).$$

Toute droite autre que $\text{Vect}(1, 0)$ contient un vecteur dont la seconde coordonnée est non nulle ; après normalisation de cette coordonnée à 1, elle s'écrit de manière unique $\text{Vect}(t, 1)$. La droite $\text{Vect}(1, 0)$ est donc exactement la direction qui manque à ce paramétrage par $t \in K$.

IDÉE L'ensemble $W \setminus \{\perp\}$ est ainsi la droite projective $\mathbb{P}^1(K)$, introduite ici uniquement comme l'ensemble des droites vectorielles de K^2 . Le point $\perp$ correspond au couple nul, qui ne détermine aucune direction.

III Faire du calcul sans choisir de représentant

6

Prenons d'autres représentants des mêmes classes : $(a', b') = \lambda(a, b)$ et $(c', d') = \mu(c, d)$ avec $\lambda, \mu \in K^*$.

Pour l'addition,

$$a'd' + c'b' = \lambda\mu(ad + bc), \quad b'd' = \lambda\mu bd.$$

Le nouveau couple obtenu est donc $\lambda\mu$ fois l'ancien. Comme $\lambda\mu \in K^*$, il représente la même classe.

Pour la multiplication,

$$(a'c', b'd') = \lambda\mu(ac, bd),$$

ce qui donne encore la même classe. Enfin $(b', a') = \lambda(b, a)$, donc $\rho([a, b]) = [b, a]$ ne dépend pas non plus du représentant. Les trois opérations sont bien définies sur W .

7 —————

(a) Les formules sont symétriques en (a, b) et (c, d) , puisque K est commutatif : addition et multiplication sont commutatives.

Pour $x = [a, b]$,

$$[a, b] + [0, 1] = [a, b]$$

et

$$[a, b][1, 1] = [a, b].$$

Ainsi $0_W = [0, 1]$ est neutre pour l'addition et $1_W = [1, 1]$ pour la multiplication.

(b) Soient $x = [a, b]$, $y = [c, d]$ et $z = [e, f]$. Alors

$$(x + y) + z = [ad + bc, bd] + [e, f] = [adf + bcf + bde, bdf].$$

D'autre part,

$$x + (y + z) = [a, b] + [cf + de, df] = [adf + bcf + bde, bdf].$$

L'addition est associative.

Pour la multiplication,

$$(xy)z = [ac, bd][e, f] = [ace, bdf]$$

et

$$x(yz) = [a, b][ce, df] = [ace, bdf].$$

Elle est donc associative.

(c) On a immédiatement

$$\rho(\rho([a, b])) = \rho([b, a]) = [a, b].$$

De plus,

$$\rho(xy) = \rho([ac, bd]) = [bd, ac],$$

alors que

$$\rho(x)\rho(y) = [b, a][d, c] = [bd, ac].$$

Ainsi $\rho(\rho(x)) = x$ et $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$.

8

Si $\iota(s) = \iota(t)$, alors $[s, 1] = [t, 1]$; l'unicité démontrée en 4(a) donne $s = t$. Donc ι est injective.

Ensuite,

$$\iota(s) + \iota(t) = [s, 1] + [t, 1] = [s + t, 1] = \iota(s + t),$$

et

$$\iota(s)\iota(t) = [s, 1][t, 1] = [st, 1] = \iota(st).$$

Enfin $\iota(0) = [0, 1] = 0_W$ et $\iota(1) = [1, 1] = 1_W$. L'identification de K à son image dans W respecte donc l'addition et la multiplication.

9

(a) Si $a \in K^*$,

$$\rho(a) = \rho([a, 1]) = [1, a] = [1/a, 1] = \frac{1}{a}.$$

Pour les trois éléments particuliers,

$$\rho(0) = \infty, \quad \rho(\infty) = 0, \quad \rho(\perp) = \perp.$$

(b) Pour $a \in K$,

$$a + \infty = [a, 1] + [1, 0] = [1, 0] = \infty,$$

et

$$a + \perp = [a, 1] + [0, 0] = [0, 0] = \perp.$$

Enfin,

$$\infty + \infty = [1, 0] + [1, 0] = [0, 0] = \perp.$$

(c) Si $a \in K^*$,

$$a\infty = [a, 1][1, 0] = [a, 0] = \infty.$$

En revanche,

$$0\infty = [0, 1][1, 0] = [0, 0] = \perp.$$

On a aussi $\infty^2 = [1, 0][1, 0] = [1, 0] = \infty$. Enfin, si $x = [a, b]$,

$$x\perp = [a, b][0, 0] = [0, 0] = \perp.$$

L'élément $\perp$ est donc absorbant pour la multiplication, comme il l'était pour l'addition d'après (b).

(d) Par définition,

$$\frac{1}{0} = 1\rho(0) = \infty, \quad \frac{0}{0} = 0\rho(0) = \perp, \quad \frac{1}{\infty} = 1\rho(\infty) = 0.$$

Ces égalités ne sont pas des conventions ajoutées : elles ont été déduites de la construction par classes et des opérations de fractions.

IV Les lois usuelles résistent-elles ?

10

Comme $0 + 1 = 1$ dans la copie de K ,

$$(0 + 1)\infty = 1\infty = \infty.$$

Mais

$$0\infty + 1\infty = \perp + \infty = \perp.$$

Or $\infty \neq \perp$. La distributivité usuelle $(x + y)z = xz + yz$ n'est donc pas une identité de W .

11

Écrivons $x = [a, b]$, $y = [c, d]$ et $z = [e, f]$. On a d'abord

$$(x + y)z = [ad + bc, bd][e, f] = [e(ad + bc), bdf].$$

Par ailleurs,

$$0_W z = [0, 1][e, f] = [0, f].$$

Ainsi

$$(x + y)z + 0_W z = [e(ad + bc), bdf] + [0, f] = [ef(ad + bc), bdf^2].$$

De l'autre côté,

$$xz = [ae, bf], \quad yz = [ce, df],$$

donc

$$xz + yz = [aef + cebf, bdf^2] = [ef(ad + bc), bdf^2].$$

Les deux représentants sont même égaux, donc

$$(x + y)z + 0_W z = xz + yz.$$

IDÉE Le terme $0_W z$ mesure exactement le défaut de la distributivité usuelle. Lorsque $0_W z = 0_W$, l'identité précédente redevient la distributivité familière.

12

(a) Si $x = [a, b]$, alors

$$-x = (-1)x = [-1, 1][a, b] = [-a, b].$$

Par conséquent,

$$x - x = [a, b] + [-a, b] = [0, b^2].$$

D'autre part, $x^2 = [a^2, b^2]$, puis

$$0_W x^2 = [0, 1][a^2, b^2] = [0, b^2].$$

Donc

$$x - x = 0_W x^2.$$

(b) On a $[0, b^2] = [0, 1]$ exactement lorsque $b \neq 0$: si $b \neq 0$, les deux couples diffèrent par le facteur non nul $1/b^2$; si $b = 0$, on obtient $[0, 0] = \perp \neq 0_W$.

Ainsi $x - x = 0_W$ si et seulement si x possède un représentant dont le dénominateur est non nul, c'est-à-dire, d'après la question 4, si et seulement si $x \in K$.

13

Soit $x = [a, b]$. On a

$$\frac{x}{x} = x\rho(x) = [a, b][b, a] = [ab, ab].$$

D'abord $0_W x = [0, b]$. Donc

$$\frac{0_W x}{x} = [0, b][b, a] = [0, ab].$$

Puis

$$1_W + \frac{0_W x}{x} = [1, 1] + [0, ab] = [ab, ab].$$

Ainsi

$$\frac{x}{x} = 1_W + \frac{0_W x}{x}.$$

La classe $[ab, ab]$ vaut $1_W = [1, 1]$ exactement lorsque $ab \neq 0$. Si $ab = 0$, le couple est $(0, 0)$ et la classe vaut $\perp$. Donc $x/x = 1_W$ exactement pour les éléments $x \in K^*$.

14

Par définition de la division,

$$\frac{x}{z} = x\rho(z), \quad \frac{y}{z} = y\rho(z).$$

Appliquons l'identité de la question 11 avec $\rho(z)$ à la place de z :

$$(x + y)\rho(z) + 0_W \rho(z) = x\rho(z) + y\rho(z).$$

C'est exactement

$$\frac{x + y}{z} + \frac{0_W}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}.$$

(a) Si $z \in K^*$, alors $\rho(z) = 1/z \in K$ et $0_W/z = 0_W$. On retrouve donc

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x + y}{z}.$$

(b) Pour $x = y = 1$ et $z = 0$,

$$\frac{1}{0} + \frac{1}{0} = \infty + \infty = \perp,$$

alors que

$$\frac{1+1}{0} = \frac{2}{0} = \infty.$$

La règle sans terme correctif donnerait donc deux éléments différents. En revanche,

$$\frac{2}{0} + \frac{0}{0} = \infty + \perp = \perp,$$

ce qui rétablit bien l'identité démontrée.

V Où se cache le corps de départ ?

15

(a) Si $x = [a, b]$, alors

$$0_W x = [0, 1][a, b] = [0, b].$$

Si $b \neq 0$, on a $[0, b] = [0, 1] = 0_W$, car $(0, 1) = (1/b)(0, b)$. Si $b = 0$, alors $[0, b] = [0, 0] = \perp \neq 0_W$. Ainsi

$$x \in W_{\text{reg}} \iff b \neq 0.$$

Cette condition ne dépend pas du représentant puisque le changement de représentant multiplie b par un scalaire non nul.

(b) La question 4(a) a montré que les classes possédant un représentant à seconde coordonnée non nulle sont exactement les classes $\iota(t)$ avec $t \in K$. Par conséquent,

$$W_{\text{reg}} = \iota(K).$$

Avec l'identification de la question 8, cela s'écrit simplement $W_{\text{reg}} = K$.

(c) La question 8 donne déjà, pour $s, t \in K$, les lois usuelles d'addition et de multiplication lorsqu'on calcule dans W . De même, $-s = (-1)s$ est l'opposé usuel. Les trois opérations restreintes à W_{reg} sont donc exactement celles du corps K .

Si $x \in K^*$, alors la question 9 donne $\rho(x) = 1/x \in K^*$, et la question 13 donne $x/x = 1_W$. En revanche,

$$\rho(0) = \infty \notin W_{\text{reg}}.$$

On retrouve donc exactement l'arithmétique du corps sur la partie régulière : les lois usuelles y fonctionnent comme avant, et le réciproque ordinaire reste une opération définie seulement sur K^* lorsqu'on exige qu'il demeure dans cette partie.

IDÉE La wheel n'abolit pas le corps de départ : elle le contient comme région où les « termes de zéro » s'annulent. C'est précisément le phénomène mis en avant dans la théorie générale des wheels.

VI On pouvait choisir autrement

16

(a) Si $x \neq 0$, alors

$$x j_c(x) x = x \frac{1}{x} x = x.$$

Si $x = 0$, alors $0 j_c(0) 0 = 0 \cdot c \cdot 0 = 0$. Ainsi, pour tout $c \in K$ et tout $x \in K$,

$$x j_c(x) x = x.$$

(b) Supposons d'abord $c = 0$. Si $x \neq 0$, alors $j_0(x) = 1/x \neq 0$ et $j_0(j_0(x)) = j_0(1/x) = x$. Pour $x = 0$, $j_0(j_0(0)) = j_0(0) = 0$. Donc j_0 est une involution.Réciproquement, supposons j_c involutive. En appliquant l'identité à $x = 0$,

$$0 = j_c(j_c(0)) = j_c(c).$$

Si $c \neq 0$, alors $j_c(c) = 1/c \neq 0$, contradiction. Il faut donc $c = 0$.

Ainsi

$$j_c \text{ est une involution} \iff c = 0.$$

Le choix $c = 0$ conduit à la totalisation $0^{-1} = 0$ utilisée dans les champs zéro-totalisés et dans les **meadows** involutifs. La construction principale du devoir fait un choix structurel différent : elle agrandit l'ensemble et fait apparaître ∞ et $\perp$. Dans les **common meadows**, on adjoint plutôt un élément d'erreur, image de 0 par le réciproque, qui se propage dans les opérations. D'autres arithmétiques totales, comme certaines constructions transréelles, distinguent des infinis signés $+\infty$ et $-\infty$. Aucun de ces choix n'est une « correction » de la valeur ordinaire de $1/0$: ce sont des extensions différentes, conçues pour préserver des familles différentes d'identités.

SOURCES

Jesper Carlström, *Wheels — On Division by Zero*, Mathematical Structures in Computer Science 14(1), 143–184, 2004. Article publié : [Lien direct](#).

Jesper Carlström, *Wheels — On Division by Zero*, Research Reports in Mathematics 11, Stockholm University, 2001. Version complète à l'origine de la construction : [Lien direct](#).

Jan A. Bergstra et John V. Tucker, *Division Safe Calculation in Totalised Fields*, Theory of Computing Systems 43, 410–424, 2008. [Lien direct](#).

Jan A. Bergstra, Yoram Hirshfeld et John V. Tucker, *Meadows and the Equational Specification of Division*, Theoretical Computer Science 410, 1261–1271, 2009. [Lien direct](#).

Jan A. Bergstra et Alban Ponse, *Division by Zero in Common Meadows*, dans *Software, Services, and Systems*, LNCS 8950, 46–61, 2015. [Lien direct](#). Version auteur : [Lien direct](#).

Jan A. Bergstra et John V. Tucker, *The Wheel of Rational Numbers as an Abstract Data Type*, LNCS 12669, 13–30, 2021. [Lien direct](#).

Jan A. Bergstra et John V. Tucker, *On The Axioms Of Common Meadows: Fracterm Calculus, Flattening And Incompleteness*, The Computer Journal 66(7), 1565–1572, 2023. Cette synthèse compare notamment plusieurs choix de totalisation, dont wheels et systèmes à infinis signés. [Lien direct](#).

L'adaptation pédagogique du devoir est volontairement plus élémentaire que la construction générale de Carlström : pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la relation par changement d'échelle non nul est exactement la spécialisation de la congruence de fractions pertinente au cas d'un corps. Les identités des questions 11 à 13 reprennent

des identités caractéristiques des wheels de fractions ; la progression par produit en croix, interprétation projective et récupération de la partie régulière est ici organisée pour un DM de niveau MP.