

CORRIGÉ

MP · MPI · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°02 — Diviser par zéro : vraiment impossible ?

Division par zéro · Fractions et classes d'équivalence · Wheels et lois algébriques · Espaces vectoriels de dimension 2 · Lois de composition

Le point essentiel du problème est de distinguer deux affirmations : dans un corps non trivial, 0 ne peut pas avoir d'inverse multiplicatif ; mais on peut agrandir l'univers et modifier certaines identités de façon cohérente pour rendre le réciproque total. La construction ci-dessous est la spécialisation à $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ d'une wheel de fractions.

I Ce que « impossible » signifie vraiment

1

(a) Pour tout $x \in K$, la distributivité donne

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x.$$

En ajoutant l'opposé de $0x$ aux deux membres, on obtient

$$0 = 0x.$$

Ainsi $0x = 0$ pour tout $x \in K$.

(b) S'il existait $u \in K$ tel que $0u = 1$, la question précédente donnerait simultanément $0u = 0$ et $0u = 1$, d'où $0 = 1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le nombre 0 ne possède donc pas d'inverse multiplicatif dans K .

(c) La démonstration de (a) utilise la distributivité et l'existence des opposés pour l'addition, donc la possibilité de simplifier une égalité additive. Avec l'hypothèse $0 \neq 1$, ces propriétés empêchent d'imposer $0u = 1$. Pour rendre le réciproque de 0 total, il faudra donc éviter d'exiger que ce réciproque soit un inverse multiplicatif au sens usuel, ou modifier certaines lois algébriques.

2

(a) Pour tout $(a, b) \in K^2$, on a $ab = ba$, donc

$$(a, b)\mathcal{R}(a, b).$$

La relation est réflexive. Si $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$, alors $ad = bc$, donc $cb = da$ par commutativité dans K : elle est également symétrique.

(b) En revanche, elle n'est pas transitive. Par exemple,

$$(1, 0)\mathcal{R}(0, 0)$$

car $1 \cdot 0 = 0 \cdot 0$, et

$$(0, 0)\mathcal{R}(0, 1)$$

car $0 \cdot 1 = 0 \cdot 0$. Mais

$$(1, 0) \not\mathcal{R}(0, 1),$$

puisque $1 \cdot 1 \neq 0 \cdot 0$.

(c) Le couple $(0, 0)$ est en relation avec tout couple (a, b) , puisque

$$0 \cdot b = 0 \cdot a.$$

Il peut donc servir d'intermédiaire entre deux couples qui ne sont pas eux-mêmes en relation. C'est précisément ce qui détruit la transitivité : la règle du produit en croix cesse de distinguer les directions dès qu'elle passe par le couple nul.

II Des fractions qui gardent leur direction

3

(a) La relation $\sim$ est réflexive car

$$(a, b) = 1 \cdot (a, b)$$

et $1 \in K^*$. Elle est symétrique : si $(c, d) = \lambda(a, b)$ avec $\lambda \in K^*$, alors

$$(a, b) = \lambda^{-1}(c, d).$$

Enfin, si $(c, d) = \lambda(a, b)$ et $(e, f) = \mu(c, d)$ avec $\lambda, \mu \in K^*$, alors

$$(e, f) = \mu\lambda(a, b)$$

avec $\mu\lambda \in K^*$. La relation est donc transitive, et ainsi une relation d'équivalence.

(b) Supposons d'abord $(a, b) \sim (c, d)$. Il existe $\lambda \in K^*$ tel que $(c, d) = \lambda(a, b)$, d'où

$$ad = a(\lambda b) = \lambda ab = (\lambda a)b = bc.$$

Réciproquement, supposons les deux couples non nuls et $ad = bc$.

Si $b \neq 0$, alors $d \neq 0$: sinon $bc = 0$, donc $c = 0$, ce qui contredirait $(c, d) \neq (0, 0)$. En posant

$$\lambda = \frac{d}{b} \in K^*,$$

on obtient

$$\lambda a = \frac{ad}{b} = c, \quad \lambda b = d.$$

Ainsi $(c, d) = \lambda(a, b)$.

Si $b = 0$, alors $a \neq 0$. L'égalité $ad = bc = 0$ donne $d = 0$. Comme (c, d) est non nul, $c \neq 0$; avec

$$\lambda = \frac{c}{a} \in K^*,$$

on obtient encore $(c, d) = \lambda(a, b)$.

Ainsi, pour deux couples non nuls,

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

(c) Si $(a, b) \sim (0, 0)$, il existe $\lambda \in K^*$ tel que

$$(0, 0) = \lambda(a, b).$$

Comme $\lambda \neq 0$, cela impose $a = b = 0$. La classe de $(0, 0)$ est donc le singleton $\{(0, 0)\}$.

4

(a) Soit $[a, b] \in W$ avec $b \neq 0$. On a

$$\left(\frac{a}{b}, 1\right) = \frac{1}{b}(a, b),$$

avec $1/b \in K^*$. Par conséquent

$$[a, b] = \left[\frac{a}{b}, 1\right] = \iota\left(\frac{a}{b}\right).$$

Ainsi $t = a/b$. Cette écriture est unique : si $[s, 1] = [t, 1]$, il existe $\lambda \in K^*$ tel que

$$(t, 1) = \lambda(s, 1).$$

La seconde coordonnée impose $\lambda = 1$, puis la première donne $s = t$.

(b) Si $a \neq 0$, alors

$$(1, 0) = \frac{1}{a}(a, 0),$$

si bien que

$$[a, 0] = [1, 0] = \infty.$$

La classe ∞ ne peut être égale à un $[t, 1]$, car une multiplication par un scalaire non nul ne transforme pas une seconde coordonnée nulle en une seconde coordonnée égale à 1. D'après la question 3(c), $\perp = [0, 0]$ est une classe singleton ; elle est donc distincte de ∞ et de toutes les classes $\iota(t)$.

(c) Tout couple (a, b) relève exactement d'un des trois cas suivants : $b \neq 0$, ou $b = 0$ avec $a \neq 0$, ou $(a, b) = (0, 0)$. On obtient donc la décomposition disjointe

$$W = \iota(K) \sqcup \{\infty\} \sqcup \{\perp\}.$$

5

(a) Si $[a, b] = [c, d] \neq \perp$, il existe $\lambda \in K^*$ tel que

$$(c, d) = \lambda(a, b).$$

Les deux vecteurs engendrent donc la même droite :

$$\text{Vect}(c, d) = \text{Vect}(a, b).$$

L'application L est bien définie.

(b) Elle est surjective : toute droite $D \in \mathcal{D}$ est engendrée par un vecteur non nul (a, b) , et alors

$$D = L([a, b]).$$

Elle est injective : si deux vecteurs non nuls (a, b) et (c, d) engendrent la même droite, l'un est un multiple non nul de l'autre. Ainsi

$$[a, b] = [c, d].$$

Donc L est une bijection.

(c) Pour $t \in K$,

$$L(\iota(t)) = \text{Vect}(t, 1),$$

alors que

$$L(\infty) = \text{Vect}(1, 0).$$

Toute droite distincte de $\text{Vect}(1, 0)$ possède un vecteur dont la seconde coordonnée est non nulle ; après multiplication par son inverse, elle s'écrit de manière unique sous la forme $\text{Vect}(t, 1)$. La classe ∞ ajoute donc exactement la direction qui manque au paramétrage par $t \in K$.

III Faire du calcul sans choisir de représentant

6

Prenons d'autres représentants des mêmes classes :

$$(a', b') = \lambda(a, b), \quad (c', d') = \mu(c, d),$$

avec $\lambda, \mu \in K^*$.

Pour l'addition,

$$a'd' + c'b' = \lambda\mu(ad + bc), \quad b'd' = \lambda\mu bd.$$

Le nouveau couple est donc $\lambda\mu$ fois l'ancien et représente la même classe.

Pour la multiplication,

$$(a'c', b'd') = \lambda\mu(ac, bd),$$

ce qui donne encore la même classe. Enfin,

$$(b', a') = \lambda(b, a),$$

si bien que $\rho([a, b]) = [b, a]$ ne dépend pas non plus du représentant. Les trois opérations sont bien définies sur W .

7

(a) Les formules définissant l'addition et la multiplication sont symétriques en (a, b) et (c, d) ; ces deux lois sont donc commutatives.

Pour $x = [a, b]$,

$$[a, b] + [0, 1] = [a, b]$$

et

$$[a, b][1, 1] = [a, b].$$

Ainsi 0_W et 1_W sont les éléments neutres annoncés.

(b) Soient

$$x = [a, b], \quad y = [c, d], \quad z = [e, f].$$

Pour l'addition,

$$(x + y) + z = [ad + bc, bd] + [e, f] = [adf + bcf + bde, bdf],$$

et

$$x + (y + z) = [a, b] + [cf + de, df] = [adf + bcf + bde, bdf].$$

L'addition est associative. Pour la multiplication,

$$(xy)z = [ac, bd][e, f] = [ace, bdf]$$

et

$$x(yz) = [a, b][ce, df] = [ace, bdf].$$

Elle est également associative.

(c) On a

$$\rho(\rho([a, b])) = [a, b],$$

et

$$\rho(xy) = \rho([ac, bd]) = [bd, ac] = [b, a][d, c] = \rho(x)\rho(y).$$

Ainsi ρ est involutive et multiplicative.

8

(a) Si $\iota(s) = \iota(t)$, alors $[s, 1] = [t, 1]$. L'unicité établie à la question 4 donne $s = t$: ι est injective.

De plus,

$$\iota(s) + \iota(t) = [s, 1] + [t, 1] = [s + t, 1] = \iota(s + t),$$

et

$$\iota(s)\iota(t) = [s, 1][t, 1] = [st, 1] = \iota(st).$$

Enfin

$$\iota(0) = 0_W, \quad \iota(1) = 1_W.$$

On peut donc identifier K à cette copie dans W .

(b) Si $a \in K^*$,

$$\rho(a) = \rho([a, 1]) = [1, a] = [1/a, 1] = \frac{1}{a}.$$

Pour les éléments particuliers,

$$\rho(0) = \infty, \quad \rho(\infty) = 0, \quad \rho(\perp) = \perp.$$

(c) Pour tout $a \in K$,

$$a + \infty = [a, 1] + [1, 0] = [1, 0] = \infty,$$

et

$$a + \perp = [a, 1] + [0, 0] = [0, 0] = \perp.$$

On a aussi

$$\infty + \infty = [1, 0] + [1, 0] = [0, 0] = \perp.$$

Pour le produit, si $a \in K^*$,

$$a\infty = [a, 1][1, 0] = [a, 0] = \infty.$$

En revanche,

$$0\infty = [0, 1][1, 0] = [0, 0] = \perp,$$

et

$$\infty^2 = [1, 0][1, 0] = [1, 0] = \infty.$$

Enfin, si $x = [a, b]$,

$$x\perp = [a, b][0, 0] = [0, 0] = \perp.$$

(d) La division étant définie par $x/y = x\rho(y)$, on obtient

$$\frac{1}{0} = 1\rho(0) = \infty,$$

$$\frac{0}{0} = 0\rho(0) = \perp,$$

et

$$\frac{1}{\infty} = 1\rho(\infty) = 0.$$

Ces valeurs découlent des opérations définies sur les classes ; elles ne sont pas ajoutées comme des conventions indépendantes.

IV Ce qui casse, ce qui se répare

9

(a) La distributivité usuelle ne subsiste pas. Par exemple, avec

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = \infty,$$

on a

$$(0 + 1)\infty = \infty,$$

alors que

$$0\infty + 1\infty = \perp + \infty = \perp.$$

Comme $\infty \neq \perp$, les deux membres diffèrent.

(b) Écrivons

$$x = [a, b], \quad y = [c, d], \quad z = [e, f].$$

Alors

$$(x + y)z = [e(ad + bc), bdf]$$

et

$$0_W z = [0, f].$$

Par conséquent,

$$(x + y)z + 0_W z = [ef(ad + bc), bdf^2].$$

D'autre part,

$$xz = [ae, bf], \quad yz = [ce, df],$$

donc

$$xz + yz = [aedf + cebf, bdf^2] = [ef(ad + bc), bdf^2].$$

Les deux classes sont égales, et ainsi

$$(x + y)z + 0_W z = xz + yz$$

pour tous $x, y, z \in W$.

10

(a) Soit $x = [a, b]$. Comme

$$-1 = [-1, 1],$$

on a

$$-x = [-a, b].$$

D'où

$$x - x = [a, b] + [-a, b] = [0, b^2].$$

Or

$$x^2 = [a^2, b^2]$$

et donc

$$0_W x^2 = [0, 1][a^2, b^2] = [0, b^2].$$

Ainsi

$$x - x = 0_W x^2.$$

On a $[0, b^2] = [0, 1]$ exactement lorsque $b \neq 0$. D'après la classification de la question 4, cela signifie exactement que x appartient à la copie de K . Ainsi

$$x - x = 0_W \iff x \in K.$$

(b) On a

$$\frac{x}{x} = x\rho(x) = [a, b][b, a] = [ab, ab].$$

Par ailleurs,

$$0_W x = [0, b],$$

puis

$$\frac{0_W x}{x} = [0, b][b, a] = [0, ab].$$

Donc

$$1_W + \frac{0_W x}{x} = [1, 1] + [0, ab] = [ab, ab] = \frac{x}{x}.$$

Enfin $[ab, ab] = [1, 1]$ si et seulement si $ab \neq 0$. Cela équivaut à $b \neq 0$ et $a \neq 0$, c'est-à-dire à dire que x est un élément non nul de la copie de K . Par conséquent

$$\frac{x}{x} = 1_W \iff x \in K^*.$$

11

(a) Pour $x = [a, b]$,

$$0_W x = [0, 1][a, b] = [0, b].$$

Cette classe est égale à $0_W = [0, 1]$ si et seulement si $b \neq 0$. En effet, si $b \neq 0$,

$$[0, b] = [0, 1],$$

car $(0, 1) = (1/b)(0, b)$; si $b = 0$, on obtient au contraire $[0, 0] = \perp$.

Ainsi

$$W_{\text{reg}} = \{[a, b] \mid b \neq 0\} = \iota(K).$$

Avec l'identification de la question 8,

$$W_{\text{reg}} = K.$$

(b) La question 8 a montré que l'addition et la multiplication y coïncident avec celles de K . Pour $t \in K$,

$$-t = (-1)t$$

est également l'opposé usuel. Enfin, si $t \in K^*$,

$$\rho(t) = \frac{1}{t} \in K^*,$$

et donc

$$\frac{t}{t} = 1_W.$$

En revanche,

$$\rho(0) = \infty \notin W_{\text{reg}}.$$

Le corps de départ est donc exactement la partie sur laquelle la multiplication par 0 se comporte classiquement ; ses opérations usuelles y sont retrouvées sans modification.

V On pouvait choisir autrement

12

(a) Si $x \neq 0$, alors

$$x j_c(x) x = x \frac{1}{x} x = x.$$

Si $x = 0$, les deux membres valent 0, quel que soit c . Ainsi

$$x j_c(x) x = x$$

pour tout $x \in K$ et tout $c \in K$.

(b) Pour $x \neq 0$, on a $j_c(x) = 1/x \neq 0$, donc

$$j_c(j_c(x)) = j_c(1/x) = x.$$

La seule contrainte vient donc de $x = 0$: il faut

$$j_c(j_c(0)) = j_c(c) = 0.$$

Si $c = 0$, cette égalité est vraie puisque $j_0(0) = 0$. Si $c \neq 0$, alors

$$j_c(c) = \frac{1}{c} \neq 0.$$

Ainsi

$$j_c \circ j_c = \text{Id}_K \iff c = 0.$$

Le choix $0^{-1} = 0$ fournit donc une totalisation du réciproque qui reste à l'intérieur du corps, mais elle n'est pas la même construction que la wheel précédente : les propriétés structurelles recherchées ne sont pas les mêmes.

SOURCES

Jesper Carlström — Wheels — On Division by Zero. [Lien direct](#)

Bergstra, Hirshfeld et Tucker — Meadows and the Equational Specification of Division. [Lien direct](#)

Bergstra et Ponse — Division by Zero in Common Meadows. [Lien direct](#)