

DM n°02 — Diviser par zéro : vraiment impossible ?

Division par zéro · Fractions et classes d'équivalence · Wheels et lois algébriques · Espaces vectoriels de dimension 2 · Lois de composition

On apprend très tôt que l'on ne peut pas « diviser par zéro ». Mais ce verdict ne signifie pas qu'un symbole comme $1/0$ porterait en lui une contradiction : il signifie d'abord que l'on ne peut pas donner à 0 un inverse tout en conservant toutes les règles d'un corps non trivial. Ce problème propose de repartir de la construction des fractions elle-même et de demander ce qui se passe si l'on cesse, au départ, d'interdire les dénominateurs nuls.

Dans tout le problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $K^* = K \setminus \{0\}$. Pour $(a, b) \in K^2$, on pensera au couple (a, b) comme à une écriture homogène de la fraction a/b , sans supposer pour l'instant que b est non nul.

I Ce que « impossible » signifie vraiment

1 Dans K , on dispose des lois usuelles de l'addition et de la multiplication.

(a) Montrer que, pour tout $x \in K$,

$$0x = 0.$$

(b) En déduire que 0 ne possède pas d'inverse multiplicatif dans K .

(c) Identifier précisément les propriétés utilisées dans la démonstration de (a). Expliquer pourquoi elles empêchent d'imposer simultanément

$$0u = 1$$

dans une structure non triviale.

2 Pour des fractions ordinaires à dénominateurs non nuls, l'égalité $a/b = c/d$ se lit $ad = bc$. Tentons d'utiliser cette règle sur tout K^2 : on définit

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff ad = bc.$$

(a) Étudier la réflexivité et la symétrie de $\mathcal{R}$.

(b) Étudier sa transitivité. Si elle échoue, construire un contre-exemple aussi simple que possible.

(c) Expliquer le rôle particulier joué par le couple $(0, 0)$ dans cet échec.

La règle du produit en croix devient trop permissive au contact du couple nul. Conservons plutôt l'idée la plus élémentaire d'une fraction : multiplier simultanément son numérateur et son dénominateur par un même scalaire non nul ne doit rien changer.

II Des fractions qui gardent leur direction

3 On définit sur K^2 la relation $\sim$ par

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \exists \lambda \in K^*, (c, d) = \lambda(a, b).$$

- (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur K^2 .
- (b) Montrer que, pour deux couples non nuls (a, b) et (c, d) ,

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

- (c) Déterminer la classe du couple $(0, 0)$.

On note désormais

$$W = K^2 / \sim$$

l'ensemble des classes d'équivalence, et $[a, b]$ la classe du couple (a, b) .

- 4 On définit $\iota : K \rightarrow W$ par

$$\iota(t) = [t, 1].$$

- (a) Montrer que, si $b \neq 0$, la classe $[a, b]$ s'écrit de manière unique sous la forme $\iota(t)$. Déterminer t en fonction de a et b .
- (b) Montrer que tous les couples $(a, 0)$ avec $a \neq 0$ appartiennent à une même classe. On la note

$$\infty = [1, 0].$$

On pose également

$$\perp = [0, 0].$$

Montrer que ces deux classes sont distinctes entre elles et distinctes de toutes les classes $\iota(t)$.

- (c) En déduire la décomposition disjointe

$$W = \iota(K) \sqcup \{\infty\} \sqcup \{\perp\}.$$

- 5 Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de K^2 . Pour $x = [a, b] \neq \perp$, on pose

$$L(x) = \text{Vect}(a, b).$$

- (a) Montrer que $L(x)$ ne dépend pas du représentant (a, b) choisi.
- (b) Montrer que L réalise une bijection de $W \setminus \{\perp\}$ sur $\mathcal{D}$.
- (c) Montrer que, pour tout $t \in K$,

$$L(\iota(t)) = \text{Vect}(t, 1),$$

et que

$$L(\infty) = \text{Vect}(1, 0).$$

Expliquer en quel sens ∞ complète le paramétrage des droites obtenu avec $t \in K$.

Nous avons obtenu les nombres de K , une direction supplémentaire, et un élément singulier. Il reste à savoir si les règles habituelles de calcul des fractions descendent réellement aux classes.

III Faire du calcul sans choisir de représentant

Pour $x = [a, b]$ et $y = [c, d]$, on propose

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd],$$

$$[a, b] [c, d] = [ac, bd],$$

ainsi qu'une opération de réciproque

$$\rho([a, b]) = [b, a].$$

On pose enfin

$$0_W = [0, 1], \quad 1_W = [1, 1].$$

6 Montrer que l'addition, la multiplication et l'application ρ sont bien définies sur les classes : leur résultat ne dépend pas des représentants choisis.

7 (a) Montrer que l'addition et la multiplication sont commutatives et que, pour tout $x \in W$,

$$x + 0_W = x, \quad x 1_W = x.$$

(b) Montrer que l'addition et la multiplication sont associatives.

(c) Montrer que, pour tous $x, y \in W$,

$$\rho(\rho(x)) = x$$

et

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y).$$

8 (a) Montrer que ι est injective et que, pour tous $s, t \in K$,

$$\iota(s + t) = \iota(s) + \iota(t), \quad \iota(st) = \iota(s)\iota(t),$$

avec

$$\iota(0) = 0_W, \quad \iota(1) = 1_W.$$

Dans la suite, on identifiera donc K à son image dans W .

(b) Montrer que, pour tout $a \in K^*$,

$$\rho(a) = \frac{1}{a},$$

puis établir

$$\rho(0) = \infty, \quad \rho(\infty) = 0, \quad \rho(\perp) = \perp.$$

(c) Établir les relations suivantes : pour tout $a \in K$,

$$a + \infty = \infty, \quad a + \perp = \perp,$$

et

$$\infty + \infty = \perp.$$

Pour tout $a \in K^*$,

$$a\infty = \infty,$$

et l'on a aussi

$$0\infty = \perp, \quad \infty^2 = \infty, \quad x\perp = \perp \quad \text{pour tout } x \in W.$$

(d) On définit désormais la division sur tout W par

$$\frac{x}{y} = x\rho(y).$$

Calculer

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{1}{\infty}.$$

IV Ce qui casse, ce qui se répare

9 (a) Décider si la distributivité usuelle

$$(x + y)z = xz + yz$$

est valable pour tous $x, y, z \in W$. Si ce n'est pas le cas, trouver un contre-exemple explicite.

(b) Montrer qu'en revanche, pour tous $x, y, z \in W$,

$$(x + y)z + 0_W z = xz + yz.$$

10 On définit

$$-x = (-1)x, \quad x - y = x + (-y).$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in W$,

$$x - x = 0_W x^2.$$

Caractériser exactement les $x \in W$ pour lesquels

$$x - x = 0_W.$$

(b) Montrer que, pour tout $x \in W$,

$$\frac{x}{x} = 1_W + \frac{0_W x}{x}.$$

Caractériser exactement les $x \in W$ pour lesquels

$$\frac{x}{x} = 1_W.$$

11 On appelle **partie régulière** de W l'ensemble

$$W_{\text{reg}} = \{x \in W \mid 0_W x = 0_W\}.$$

(a) Si $x = [a, b]$, montrer que

$$0_W x = [0, b].$$

En déduire que

$$W_{\text{reg}} = \iota(K),$$

puis, avec l'identification de la question 8,

$$W_{\text{reg}} = K.$$

(b) Montrer que l'addition, la multiplication et l'opposé restreints à W_{reg} sont exactement ceux de K . Montrer aussi que, pour tout $x \in K^*$,

$$\rho(x) = \frac{1}{x} \in K^*, \quad \frac{x}{x} = 1_W,$$

tandis que

$$\rho(0) = \infty \notin W_{\text{reg}}.$$

La structure obtenue est un exemple de **wheel** : les opérations d'addition, de multiplication et de réciproque y sont partout définies, mais certaines identités familières doivent être remplacées par des identités qui restent valables jusque sur les éléments singuliers.

V On pouvait choisir autrement

12 Revenons un instant au corps K seul. Pour un paramètre fixé $c \in K$, on définit une application totale $j_c : K \rightarrow K$ par

$$j_c(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ c & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que, quel que soit c , on a, pour tout $x \in K$,

$$x j_c(x) x = x.$$

(b) Déterminer les valeurs de c pour lesquelles j_c est une involution, c'est-à-dire pour lesquelles

$$j_c(j_c(x)) = x$$

pour tout $x \in K$.

Cette dernière construction montre qu'il n'existe pas une unique manière de rendre le réciproque total. Les **wheels**, développées notamment par Jesper Carlström, privilégient une extension où apparaissent un infini non signé et un élément singulier. Dans les **meadows** usuels étudiés par Bergstra, Hirshfeld et Tucker, on choisit au contraire $0^{-1} = 0$ sans ajouter de nouvel élément ; les **common meadows** de Bergstra et Ponse font apparaître un élément d'erreur qui se propage dans les opérations. Ces théories ne cherchent donc pas une valeur indépendante du cadre pour $1/0$: elles répondent à des exigences algébriques différentes sur les opérations que l'on souhaite rendre totales.