

MP · DM

CHAPITRES

Diviser par zéro : vraiment impossible ?

Division par zéro · Fractions et classes d'équivalence · Wheels et lois algébriques · Espaces vectoriels de dimension 2 · Lois de composition

On apprend très tôt que l'on ne peut pas « diviser par zéro ». Mais ce verdict ne signifie pas qu'un symbole comme $1/0$ porterait en lui une contradiction : il signifie d'abord que l'on ne peut pas donner à 0 un inverse tout en conservant toutes les règles d'un corps non trivial. Ce problème propose de repartir de la construction des fractions elle-même et de demander ce qui se passe si l'on cesse, au départ, d'interdire les dénominateurs nuls.

Dans tout le problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $K^* = K \setminus \{0\}$. Les seules notions extérieures éventuellement rencontrées seront définies dans l'énoncé. Pour $(a, b) \in K^2$, on pensera au couple (a, b) comme à une écriture homogène de la fraction a/b , sans supposer pour l'instant que b est non nul.

I Ce que « impossible » signifie vraiment

- 1 Dans K , on dispose de l'addition, de la multiplication et de la distributivité usuelles.
 - (a) Montrer, en utilisant seulement ces lois, que $0x = 0$ pour tout $x \in K$.
 - (b) En déduire qu'il n'existe aucun $u \in K$ tel que $0u = 1$.
 - (c) Expliquer pourquoi toute extension non triviale dans laquelle on voudrait imposer $0u = 1$ devrait nécessairement renoncer à au moins une des lois utilisées en (a).
- 2 Pour des fractions ordinaires à dénominateurs non nuls, l'égalité $a/b = c/d$ se lit $ad = bc$. Tentons d'utiliser cette règle sur tout K^2 : on définit une relation $\mathcal{R}$ par

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff ad = bc.$$

- (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique.
- (b) En considérant les trois couples $(1, 0)$, $(0, 0)$ et $(0, 1)$, montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.
- (c) Identifier précisément le rôle joué par le couple $(0, 0)$ dans cet échec.

La règle du produit en croix fonctionne donc parfaitement tant que l'on reste dans les fractions ordinaires, mais elle devient trop permissive au contact du couple nul. Cherchons une relation qui conserve l'idée la plus élémentaire d'une fraction : multiplier simultanément son numérateur et son dénominateur par un même scalaire non nul ne doit rien changer.

II Des fractions qui gardent leur direction

- 3 On définit sur K^2 la relation $\sim$ par

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \exists \lambda \in K^*, (c, d) = \lambda(a, b).$$

- (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur K^2 .
- (b) Montrer que, si (a, b) et (c, d) sont tous deux non nuls, alors

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

(c) Montrer que la classe de $(0, 0)$ est réduite au seul couple $(0, 0)$.

On note désormais

$$W = K^2 / \sim$$

l'ensemble des classes d'équivalence, et $[a, b]$ la classe du couple (a, b) .

4 On définit $\iota : K \rightarrow W$ par $\iota(t) = [t, 1]$.

(a) Montrer que tout $[a, b]$ avec $b \neq 0$ s'écrit de manière unique sous la forme $\iota(t)$.

(b) Montrer que tous les couples $(a, 0)$ avec $a \neq 0$ appartiennent à une même classe.

(c) Montrer que cette classe et $[0, 0]$ sont distinctes entre elles et distinctes de toutes les classes $\iota(t)$.

(d) On pose seulement maintenant

$$\infty = [1, 0], \quad \perp = [0, 0].$$

Montrer que W est la réunion disjointe de $\iota(K)$, de $\{\infty\}$ et de $\{\perp\}$.

5 Voici une interprétation géométrique qui ne suppose aucune connaissance de géométrie projective. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de K^2 . Pour $x = [a, b] \neq \perp$, on pose

$$L(x) = \text{Vect}(a, b).$$

(a) Montrer que $L(x)$ ne dépend pas du représentant (a, b) choisi.

(b) Montrer que L définit une bijection de $W \setminus \{\perp\}$ sur $\mathcal{D}$.

(c) Déterminer $L(\iota(t))$ pour $t \in K$ et $L(\infty)$. Expliquer en quel sens ∞ est la « direction manquante » lorsqu'on paramètre ces droites par $t \in K$.

Nous avons obtenu les nombres de K , une direction supplémentaire, et un point singulier. Il reste à savoir si les règles habituelles de calcul des fractions descendent réellement aux classes que nous venons de construire.

III Faire du calcul sans choisir de représentant

Pour $x = [a, b]$ et $y = [c, d]$, on propose les formules

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd],$$

$$[a, b][c, d] = [ac, bd],$$

et une opération de réciproque

$$\rho([a, b]) = [b, a].$$

On pose aussi

$$0_W = [0, 1], \quad 1_W = [1, 1].$$

- 6 Montrer que les deux lois binaires et l'application ρ sont bien définies sur les classes : leur résultat ne dépend pas des représentants choisis.
- 7 Les calculs suivants doivent être faits dans W , à partir des représentants.

- (a) Montrer que l'addition et la multiplication sont commutatives, et que 0_W et 1_W sont respectivement leurs éléments neutres.
- (b) Montrer que l'addition et la multiplication sont associatives.
- (c) Montrer que

$$\rho(\rho(x)) = x$$

pour tout $x \in W$, puis que

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y).$$

- 8 Montrer que ι est injective et que, pour tous $s, t \in K$,

$$\iota(s + t) = \iota(s) + \iota(t), \quad \iota(st) = \iota(s)\iota(t),$$

avec $\iota(0) = 0_W$ et $\iota(1) = 1_W$.

Dans la suite, on identifiera donc $t \in K$ et $\iota(t) \in W$.

- 9 Déterminer les valeurs suivantes.

- (a) Pour $a \in K^*$, calculer $\rho(a)$, puis calculer $\rho(0)$, $\rho(\infty)$ et $\rho(\perp)$.
- (b) Pour $a \in K$, calculer $a + \infty$ et $a + \perp$, puis $\infty + \infty$.
- (c) Pour $a \in K^*$, calculer $a\infty$, puis 0∞ , ∞^2 et $x\perp$ pour un $x \in W$ quelconque.
- (d) On définit désormais la division sur tout W par

$$\frac{x}{y} = x\rho(y).$$

Calculer $1/0$, $0/0$ et $1/\infty$.

IV Les lois usuelles résistent-elles ?

- 10 La distributivité usuelle serait l'identité $(x + y)z = xz + yz$. Calculer séparément

$$(0 + 1)\infty \quad \text{et} \quad 0\infty + 1\infty.$$

Que peut-on conclure ?

- 11 Montrer cependant que, pour tous $x, y, z \in W$,

$$(x + y)z + 0_W z = xz + yz.$$

On pourra choisir des représentants $x = [a, b]$, $y = [c, d]$ et $z = [e, f]$ et comparer directement les deux classes obtenues.

- 12 On définit

$$-x = (-1)x, \quad x - y = x + (-y).$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in W$,

$$x - x = 0_W x^2.$$

(b) Caractériser les $x \in W$ pour lesquels $x - x = 0_W$.

13 Montrer que, pour tout $x \in W$,

$$\frac{x}{x} = 1_W + \frac{0_W x}{x}.$$

Caractériser les $x \in W$ pour lesquels $x/x = 1_W$.

14 Montrer que, pour tous $x, y, z \in W$,

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x+y}{z} + \frac{0_W}{z}.$$

(a) Retrouver la règle usuelle de mise au même dénominateur lorsque $z \in K^*$.

(b) Avec $x = y = 1$ et $z = 0$, vérifier directement que le terme correctif ne peut pas être supprimé.

Les règles singulières ne sont donc pas des exceptions ajoutées après coup : elles sont les conséquences des mêmes formules de fractions, appliquées à des classes que l'arithmétique d'un corps écartait auparavant.

V Où se cache le corps de départ ?

On appelle partie régulière de W l'ensemble

$$W_{\text{reg}} = \{x \in W \mid 0_W x = 0_W\}.$$

15 (a) Si $x = [a, b]$, montrer que

$$0_W x = [0, b].$$

En déduire que $x \in W_{\text{reg}}$ si et seulement si $b \neq 0$.

(b) Montrer que

$$W_{\text{reg}} = K$$

avec l'identification de la question 8.

(c) Montrer que l'addition, la multiplication et l'opposé restreints à W_{reg} sont exactement ceux de K . Montrer aussi que, si $x \in W_{\text{reg}} \setminus \{0\}$, alors $\rho(x) \in W_{\text{reg}}$ et $x/x = 1_W$, tandis que $\rho(0) \notin W_{\text{reg}}$.

La structure construite est un exemple de **wheel** : une structure algébrique où addition, multiplication et réciproque sont partout définies, au prix d'une modification contrôlée de certaines identités familières. Ici, le corps K n'a pas disparu : il est exactement la partie régulière de la wheel.

VI On pouvait choisir autrement

- 16 Revenons un instant au corps K seul. Pour un paramètre fixé $c \in K$, on définit une application totale $j_c : K \rightarrow K$ par

$$j_c(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ c & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Montrer que, quel que soit c , on a pour tout $x \in K$

$$x j_c(x) x = x.$$

- (b) Déterminer les valeurs de c pour lesquelles j_c est une involution, c'est-à-dire

$$j_c(j_c(x)) = x$$

pour tout $x \in K$.

Cette dernière construction montre qu'il n'existe pas une unique manière de rendre le réciproque total. Les **wheels**, développées notamment par Jesper Carlström, privilégient une extension où apparaissent un infini non signé et un élément singulier. Bergstra, Tucker et leurs collaborateurs ont étudié d'autres choix axiomatiques : dans les **meadows** usuels, $0^{-1} = 0$, tandis que les **common meadows** font apparaître un élément d'erreur qui se propage dans les opérations. D'autres systèmes distinguent encore des infinis signés. Ces théories ne cherchent pas une valeur indépendante du cadre pour $1/0$: elles répondent à des exigences structurelles différentes sur les opérations que l'on souhaite rendre totales.