

CORRIGÉ

MPSI · MP2I · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°01 — Deux coordonnées, un seul objet

Ensembles · Produit cartésien ·
Applications · Composition ·
Bijections

I Deux coordonnées suffisent

1

Supposons que $h : X \rightarrow A \times B$ vérifie

$$\pi_1 \circ h = f, \quad \pi_2 \circ h = g.$$

Pour tout $x \in X$, l'élément $h(x)$ du produit cartésien est entièrement déterminé par ses deux coordonnées. On a donc nécessairement

$$h(x) = (\pi_1(h(x)), \pi_2(h(x))) = (f(x), g(x)).$$

Réciproquement, l'application

$$h : X \rightarrow A \times B, \quad x \mapsto (f(x), g(x))$$

vérifie bien les deux relations demandées. Il existe donc une unique telle application, et

$$\boxed{\langle f, g \rangle(x) = (f(x), g(x)).}$$

IDÉE Une application à valeurs dans un produit est entièrement déterminée par ses deux applications coordonnées. La suite transforme cette observation élémentaire en une propriété de caractérisation.

2

Pour tout $(a, b) \in A \times B$,

$$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle(a, b) = (\pi_1(a, b), \pi_2(a, b)) = (a, b).$$

Ainsi

$$\boxed{\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \text{id}_{A \times B}.$$

Soit maintenant $u : Y \rightarrow X$. Pour tout $y \in Y$,

$$(\langle f, g \rangle \circ u)(y) = (f(u(y)), g(u(y))) = \langle f \circ u, g \circ u \rangle(y).$$

D'où

$$\boxed{\langle f, g \rangle \circ u = \langle f \circ u, g \circ u \rangle.}$$

II Reconnaître un produit sans voir ses couples

3

Soient X un ensemble et $f : X \rightarrow A$, $g : X \rightarrow B$. D'après la question 1, il existe une unique application

$$\langle f, g \rangle : X \rightarrow A \times B$$

telle que

$$\pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f, \quad \pi_2 \circ \langle f, g \rangle = g.$$

C'est exactement la propriété (U) . Ainsi

$$(A \times B, \pi_1, \pi_2) \text{ possède } (U).$$

4

Puisque (Q, r, s) possède (U) , on peut l'appliquer avec $X = P$ et avec les deux applications

$$p : P \rightarrow A, \quad q : P \rightarrow B.$$

Il existe donc une unique application $\theta : P \rightarrow Q$ telle que

$$r \circ \theta = p, \quad s \circ \theta = q.$$

De même, la propriété (U) de (P, p, q) , appliquée aux applications $r : Q \rightarrow A$ et $s : Q \rightarrow B$, fournit une unique application $\rho : Q \rightarrow P$ telle que

$$p \circ \rho = r, \quad q \circ \rho = s.$$

Considérons $\rho \circ \theta : P \rightarrow P$. On a

$$p \circ \rho \circ \theta = r \circ \theta = p,$$

et de même

$$q \circ \rho \circ \theta = s \circ \theta = q.$$

Or id_P vérifie également

$$p \circ \text{id}_P = p, \quad q \circ \text{id}_P = q.$$

La propriété d'unicité dans (U) pour le triplet (P, p, q) impose donc

$$\rho \circ \theta = \text{id}_P.$$

De la même manière,

$$\theta \circ \rho = \text{id}_Q.$$

Ainsi θ est bijective et $\rho = \theta^{-1}$.

Enfin, son unicité parmi les applications $P \rightarrow Q$ vérifiant les deux relations de compatibilité est déjà fournie par la première application de (U) à (Q, r, s) . On a donc bien une unique bijection compatible.

IDÉE Le point essentiel n'est pas de calculer une bijection : c'est l'unicité elle-même qui force les deux applications construites dans des sens opposés à être réciproques.

5

La conclusion est fausse si l'on ne conserve que l'existence.

Posons

$$\tilde{P} = (A \times B) \times \{0, 1\},$$

et définissons

$$\tilde{p}((a, b), \varepsilon) = a, \quad \tilde{q}((a, b), \varepsilon) = b.$$

Le triplet $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ possède (U) , donc a fortiori (E) .

Montrons que $(\tilde{P}, \tilde{p}, \tilde{q})$ possède aussi (E) . Si $f : X \rightarrow A$ et $g : X \rightarrow B$, l'application

$$h(x) = ((f(x), g(x)), 0)$$

vérifie

$$\tilde{p} \circ h = f, \quad \tilde{q} \circ h = g.$$

Il existe donc toujours au moins une application convenable.

En revanche, toute application $\theta : \tilde{P} \rightarrow A \times B$ compatible avec les projections doit vérifier

$$\pi_1 \circ \theta = \tilde{p}, \quad \pi_2 \circ \theta = \tilde{q}.$$

Par détermination des deux coordonnées,

$$\theta((a, b), \varepsilon) = (a, b).$$

En particulier,

$$\theta((a, b), 0) = \theta((a, b), 1)$$

pour tout $(a, b) \in A \times B$. Comme A et B sont non vides, $A \times B$ est non vide, et cette application n'est pas injective. Il n'existe donc aucune bijection compatible de $\tilde{P}$ vers $A \times B$.

Ainsi, l'existence seule autorise des « copies redondantes » d'un même couple de coordonnées ; c'est l'unicité qui les interdit.

6

On a toujours

$$p = \pi_1 \circ \Phi, \quad q = \pi_2 \circ \Phi.$$

Supposons d'abord que (P, p, q) possède (U) . D'après la question 3, $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ possède également (U) . La question 4 fournit donc une unique bijection $P \rightarrow A \times B$ compatible avec les projections. Or Φ est précisément une application compatible, puisque

$$\pi_1 \circ \Phi = p, \quad \pi_2 \circ \Phi = q.$$

Par unicité, cette bijection est Φ . Ainsi Φ est bijective.

Réciproquement, supposons Φ bijective. Soient X un ensemble et $f : X \rightarrow A, g : X \rightarrow B$. Posons

$$h = \Phi^{-1} \circ \langle f, g \rangle.$$

Alors

$$p \circ h = \pi_1 \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \langle f, g \rangle = \pi_1 \circ \langle f, g \rangle = f,$$

et de même $q \circ h = g$. L'existence est acquise.

Si $k : X \rightarrow P$ vérifie également $p \circ k = f$ et $q \circ k = g$, alors les deux coordonnées de $\Phi \circ k$ sont f et g . La question 1 donne donc

$$\Phi \circ k = \langle f, g \rangle = \Phi \circ h.$$

Comme Φ est injective, $k = h$. L'unicité est démontrée, donc (P, p, q) possède (U) .

On a finalement

$$(P, p, q) \text{ possède } (U) \iff \Phi \text{ est bijective.}$$

Dire que Φ est bijective revient, point par point, à dire que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, il existe un unique $z \in P$ tel que

$$p(z) = a, \quad q(z) = b.$$

III Le produit comme machine à construire des applications

7

(a) Par définition, $f \times g$ est l'unique application dont les deux coordonnées sont $f \circ \pi_1$ et $g \circ \pi_2$. Pour tout $(a, b) \in A \times B$,

$$(f \times g)(a, b) = (f(\pi_1(a, b)), g(\pi_2(a, b))),$$

donc

$$(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b)).$$

(b) La formule précédente donne immédiatement

$$(\text{id}_A \times \text{id}_B)(a, b) = (a, b),$$

d'où

$$\text{id}_A \times \text{id}_B = \text{id}_{A \times B}.$$

Soient maintenant

$$f_1 : A \rightarrow A', \quad f_2 : A' \rightarrow A'', \quad g_1 : B \rightarrow B', \quad g_2 : B' \rightarrow B''.$$

Pour tout $(a, b) \in A \times B$,

$$((f_2 \circ f_1) \times (g_2 \circ g_1))(a, b) = (f_2(f_1(a)), g_2(g_1(b))).$$

D'autre part,

$$((f_2 \times g_2) \circ (f_1 \times g_1))(a, b) = (f_2(f_1(a)), g_2(g_1(b))).$$

Par conséquent

$$(f_2 \circ f_1) \times (g_2 \circ g_1) = (f_2 \times g_2) \circ (f_1 \times g_1).$$

(c) Supposons f et g injectives. Si

$$(f \times g)(a_1, b_1) = (f \times g)(a_2, b_2),$$

alors $f(a_1) = f(a_2)$ et $g(b_1) = g(b_2)$, donc $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. Ainsi $f \times g$ est injective.

Réciproquement, supposons $f \times g$ injective. Comme B est non vide, fixons $b_0 \in B$. Si $f(a_1) = f(a_2)$, alors

$$(f \times g)(a_1, b_0) = (f(a_1), g(b_0)) = (f(a_2), g(b_0)) = (f \times g)(a_2, b_0).$$

L'injectivité de $f \times g$ donne $a_1 = a_2$. Ainsi f est injective. En fixant de même un élément de A , on montre que g est injective. Donc

$$f \times g \text{ injective} \iff f \text{ et } g \text{ injectives.}$$

Supposons maintenant f et g surjectives. Pour $(a', b') \in A' \times B'$, on choisit $a \in A$ et $b \in B$ tels que $f(a) = a'$ et $g(b) = b'$. Alors

$$(f \times g)(a, b) = (a', b'),$$

donc $f \times g$ est surjective.

Réciproquement, supposons $f \times g$ surjective. Comme B' est non vide, fixons $b'_0 \in B'$. Pour tout $a' \in A'$, la surjectivité de $f \times g$ fournit $(a, b) \in A \times B$ tel que

$$(f(a), g(b)) = (a', b'_0).$$

Ainsi $f(a) = a'$, donc f est surjective. En fixant un élément de A' on obtient de même la surjectivité de g . Par conséquent

$$f \times g \text{ surjective} \iff f \text{ et } g \text{ surjectives.}$$

On en déduit

$$f \times g \text{ bijective} \iff f \text{ et } g \text{ bijectives.}$$

Dans ce cas, la règle de composition donne

$$(f^{-1} \times g^{-1}) \circ (f \times g) = (f^{-1} \circ f) \times (g^{-1} \circ g) = \text{id}_{A \times B},$$

et, dans l'autre sens,

$$(f \times g) \circ (f^{-1} \times g^{-1}) = \text{id}_{A' \times B'}.$$

Ainsi

$$(f \times g)^{-1} = f^{-1} \times g^{-1}.$$

IV La construction miroir : réunir sans confondre

8

La propriété miroir est la suivante.

Un triplet (C, i, j) , où $i : A \rightarrow C$ et $j : B \rightarrow C$, possède la propriété $(U^\vee)$ lorsque, pour tout ensemble X et toutes applications

$$f : A \rightarrow X, \quad g : B \rightarrow X,$$

il existe une unique application $h : C \rightarrow X$ telle que

$$h \circ i = f, \quad h \circ j = g.$$

Montrons que $(A \sqcup B, i_A, i_B)$ possède cette propriété.

Les deux sous-ensembles $A \times \{0\}$ et $B \times \{1\}$ sont disjoints et leur réunion est $A \sqcup B$. On peut donc définir

$$h(a, 0) = f(a), \quad h(b, 1) = g(b).$$

Cette définition couvre tous les éléments de $A \sqcup B$ et ne crée aucune ambiguïté. Elle donne bien

$$h \circ i_A = f, \quad h \circ i_B = g.$$

Si $k : A \sqcup B \rightarrow X$ vérifie les mêmes relations, alors

$$k(a, 0) = f(a), \quad k(b, 1) = g(b)$$

pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$. Les valeurs de k sont donc imposées sur tout $A \sqcup B$, d'où $k = h$.

Ainsi

$$(A \sqcup B, i_A, i_B) \text{ possède } (U^\vee).$$

9

Appliquons $(U^\vee)$ pour (C, i, j) avec $X = D$ et avec les applications

$$i' : A \rightarrow D, \quad j' : B \rightarrow D.$$

Il existe une unique application $\eta : C \rightarrow D$ telle que

$$\eta \circ i = i', \quad \eta \circ j = j'.$$

De même, $(U^\vee)$ pour (D, i', j') fournit une unique application $\mu : D \rightarrow C$ telle que

$$\mu \circ i' = i, \quad \mu \circ j' = j.$$

Alors

$$(\mu \circ \eta) \circ i = \mu \circ i' = i,$$

et

$$(\mu \circ \eta) \circ j = \mu \circ j' = j.$$

L'identité de C possède les mêmes propriétés. Par unicité dans $(U^\vee)$ pour (C, i, j) ,

$$\mu \circ \eta = \text{id}_C.$$

De même,

$$\eta \circ \mu = \text{id}_D.$$

Donc η est bijective, de réciproque μ . Son unicité est déjà assurée par la première application de $(U^\vee)$.

10

Les questions 4 et 9 montrent qu'une propriété universelle ne caractérise pas nécessairement un objet par la forme de ses éléments : elle peut le caractériser, de manière rigide, par les applications qu'il permet de construire. Deux réalisations d'une même propriété sont alors reliées par une unique bijection compatible avec les applications de structure.

La question 5 montre pourquoi les deux mots « existe » et « unique » ont des rôles différents. L'existence garantit qu'on peut effectuer la construction demandée ; l'unicité interdit d'ajouter des copies redondantes qui seraient invisibles aux applications de structure.

Enfin, les directions sont inversées dans les deux constructions :

- pour (U) , deux applications $X \rightarrow A$ et $X \rightarrow B$ ayant le même domaine se rassemblent en une application $X \rightarrow P$;
- pour $(U^\vee)$, deux applications $A \rightarrow X$ et $B \rightarrow X$ ayant le même codomaine se rassemblent en une application $C \rightarrow X$.

Le produit cartésien et l'union disjointe apparaissent ainsi comme deux constructions miroirs.

SOURCES

Tom Leinster — Basic Category Theory, chapitre 5 Limits. [Lien direct](#)

Tom Leinster — Basic Category Theory, version auteur. [Lien direct](#)