

DM n°01 — Deux coordonnées, un seul objet

Ensembles · Produit cartésien ·
Applications · Composition ·
Bijections

On connaît $A \times B$ comme l'ensemble des couples (a, b) . Le problème propose un autre point de vue : peut-on reconnaître le produit cartésien uniquement par la manière dont les applications se composent avec ses deux projections, sans regarder directement la forme de ses éléments ?

Dans tout le problème, A et B désignent deux ensembles non vides. Seules les notions usuelles d'ensemble, de produit cartésien, d'application, de composition, d'injection, de surjection et de bijection sont supposées connues. Tout concept supplémentaire est défini dans le sujet.

On note

$$\pi_1 : A \times B \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a, \quad \pi_2 : A \times B \rightarrow B, \quad (a, b) \mapsto b$$

les deux projections.

I Deux coordonnées suffisent

- 1 Soit X un ensemble, et soient $f : X \rightarrow A$ et $g : X \rightarrow B$ deux applications. Montrer qu'il existe une unique application $h : X \rightarrow A \times B$ telle que

$$\pi_1 \circ h = f, \quad \pi_2 \circ h = g.$$

Déterminer explicitement cette application.

On la notera désormais $\langle f, g \rangle$.

- 2 Établir les deux identités suivantes :

$$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \text{id}_{A \times B},$$

et, pour toute application $u : Y \rightarrow X$,

$$\langle f, g \rangle \circ u = \langle f \circ u, g \circ u \rangle.$$

II Reconnaître un produit sans voir ses couples

On dira qu'un triplet (P, p, q) , où P est un ensemble et $p : P \rightarrow A$, $q : P \rightarrow B$, possède la propriété (U) lorsque, pour tout ensemble X et toutes applications $f : X \rightarrow A$ et $g : X \rightarrow B$, il existe une unique application $h : X \rightarrow P$ telle que

$$p \circ h = f, \quad q \circ h = g.$$

- 3 Montrer que $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ possède la propriété (U).
4 Soient (P, p, q) et (Q, r, s) deux triplets possédant (U). Montrer qu'il existe une unique bijection

$$\theta : P \rightarrow Q$$

telle que

$$r \circ \theta = p, \quad s \circ \theta = q.$$

Ainsi, la propriété (U) doit permettre de reconnaître le produit cartésien sans avoir à supposer que ses éléments sont déjà écrits comme des couples.

- 5 On appelle (E) la propriété obtenue à partir de (U) en remplaçant « il existe une unique application » par « il existe au moins une application ».

La conclusion de la question 4 reste-t-elle vraie si les deux triplets ne sont supposés posséder que (E) ? Justifier complètement la réponse ; en cas de réponse négative, construire un contre-exemple valable pour tous ensembles non vides A et B .

- 6 Pour un triplet quelconque (P, p, q) , on définit

$$\Phi : P \rightarrow A \times B, \quad z \mapsto (p(z), q(z)).$$

Montrer que (P, p, q) possède (U) si et seulement si Φ est bijective. Reformuler ensuite ce critère sans utiliser le mot « bijective », uniquement en termes des éléments de P qui ont des images prescrites par p et q .

III Le produit comme machine à construire des applications

Soient maintenant A' et B' deux ensembles non vides, et soient

$$f : A \rightarrow A', \quad g : B \rightarrow B'.$$

On note π'_1 et π'_2 les projections de $A' \times B'$.

- 7 La propriété (U) permet de définir une unique application, notée

$$f \times g : A \times B \rightarrow A' \times B',$$

par les relations

$$\pi'_1 \circ (f \times g) = f \circ \pi_1, \quad \pi'_2 \circ (f \times g) = g \circ \pi_2.$$

(a) Déterminer $(f \times g)(a, b)$.

(b) Établir les règles

$$\text{id}_A \times \text{id}_B = \text{id}_{A \times B}$$

et, lorsque les compositions ont un sens,

$$(f_2 \circ f_1) \times (g_2 \circ g_1) = (f_2 \times g_2) \circ (f_1 \times g_1).$$

(c) Caractériser l'injectivité et la surjectivité de $f \times g$ en fonction de celles de f et de g . En déduire le cas où $f \times g$ est bijective et déterminer alors son application réciproque.

IV La construction miroir : réunir sans confondre

On définit l'union disjointe étiquetée

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}),$$

ainsi que

$$i_A : A \rightarrow A \sqcup B, \quad a \mapsto (a, 0), \quad i_B : B \rightarrow A \sqcup B, \quad b \mapsto (b, 1).$$

- 8 Formuler puis démontrer une propriété universelle de $A \sqcup B$ qui soit le miroir de (U) : cette fois, on partira de deux applications $f : A \rightarrow X$ et $g : B \rightarrow X$ ayant le même codomaine, et l'application recherchée devra partir de $A \sqcup B$.

On notera $(U^\vee)$ la propriété ainsi formulée.

- 9 Soient (C, i, j) et (D, i', j') deux triplets possédant $(U^\vee)$. Montrer qu'il existe une unique bijection $\eta : C \rightarrow D$ telle que

$$\eta \circ i = i', \quad \eta \circ j = j'.$$

- 10 Résumer en quelques lignes ce que les questions 4, 5 et 9 montrent sur le rôle respectif de l'existence et de l'unicité dans une propriété universelle, puis comparer la direction des applications dans (U) et dans $(U^\vee)$.

Les propriétés (U) et $(U^\vee)$ sont des propriétés universelles : elles caractérisent un objet par les applications qui passent par lui. Cette idée est centrale en théorie des catégories, qui étudie des structures différentes à travers les mêmes schémas d'applications ; produit et union disjointe en sont ici deux exemples miroirs.