

Deux coordonnées, un seul objet

Ensembles · Produit cartésien ·
Applications · Composition ·
Bijections

On connaît $A \times B$ comme l'ensemble des couples (a, b) . Le problème propose un autre point de vue : peut-on reconnaître le produit cartésien uniquement par la manière dont les applications se composent avec ses deux projections, sans regarder directement la forme de ses éléments ?

Dans tout le problème, A et B désignent deux ensembles non vides. Seules les notions usuelles d'ensemble, de produit cartésien, d'application, de composition, d'injection, de surjection et de bijection sont supposées connues. Tout concept supplémentaire est défini dans le sujet.

On note

$$\pi_1 : A \times B \rightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a, \quad \pi_2 : A \times B \rightarrow B, \quad (a, b) \mapsto b$$

les deux projections.

I Le produit cartésien vu par les applications

- 1 Soit X un ensemble, et soient $f : X \rightarrow A$ et $g : X \rightarrow B$ deux applications.
 - (a) Construire une application $h : X \rightarrow A \times B$ telle que $\pi_1 \circ h = f$ et $\pi_2 \circ h = g$.
 - (b) Montrer qu'une telle application h est unique.
- 2 On prend maintenant $B = A$, $X = A$ et $f = g = \text{id}_A$. Déterminer explicitement l'unique application $\Delta : A \rightarrow A \times A$ obtenue à la question précédente. Vérifier que ses deux projections sont égales à id_A .
- 3 Soit maintenant $g : A \rightarrow B$. On applique la question 1 aux applications $\text{id}_A : A \rightarrow A$ et $g : A \rightarrow B$.
 - (a) Déterminer l'application $\gamma_g : A \rightarrow A \times B$ ainsi obtenue.
 - (b) Montrer que γ_g est injective.
 - (c) Décrire son image dans $A \times B$.

II Reconnaître un produit sans voir ses couples

On dira qu'un triplet (P, p, q) , où P est un ensemble et $p : P \rightarrow A$, $q : P \rightarrow B$, possède la propriété (U) lorsque, pour tout ensemble X et toutes applications $f : X \rightarrow A$ et $g : X \rightarrow B$, il existe une unique application $h : X \rightarrow P$ telle que

$$p \circ h = f, \quad q \circ h = g.$$

- 4 Montrer que $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ possède la propriété (U) .
- 5 Soit (P, p, q) un triplet possédant (U) .
 - (a) Définir naturellement une application $\Phi : P \rightarrow A \times B$ à partir de p et q .
 - (b) En utilisant (U) avec $X = A \times B$, construire une application $\Psi : A \times B \rightarrow P$ telle que $p \circ \Psi = \pi_1$ et $q \circ \Psi = \pi_2$.

- (c) Sans calculer explicitement Ψ , montrer que $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{A \times B}$ et $\Psi \circ \Phi = \text{id}_P$.
- (d) En déduire que Φ est une bijection.
- 6 Soient (P, p, q) et (Q, r, s) deux triplets possédant (U) . Montrer qu'il existe une unique bijection $\theta : P \rightarrow Q$ telle que $r \circ \theta = p$ et $s \circ \theta = q$.
- Ainsi, tout triplet possédant (U) est, en un sens précis, « le même » que le produit cartésien usuel.

III Pourquoi le mot « unique » est indispensable

On appelle (E) la propriété obtenue à partir de (U) en supprimant seulement le mot « unique ».

On considère

$$\tilde{P} = (A \times B) \times \{0, 1\}$$

et les applications

$$\tilde{p}((a, b), \varepsilon) = a, \quad \tilde{q}((a, b), \varepsilon) = b.$$

- 7 Montrer que $(\tilde{P}, \tilde{p}, \tilde{q})$ possède la propriété (E) .
- 8 Montrer qu'il ne possède pas la propriété (U) . On pourra prendre pour X un ensemble à un seul élément.
- 9 Considérons maintenant, pour un triplet (P, p, q) , la propriété (S) suivante : pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, il existe un unique $z \in P$ tel que $p(z) = a$ et $q(z) = b$.
- (a) Montrer que (U) implique (S) .
- (b) Montrer réciproquement que (S) implique (U) .

Ainsi, pour les ensembles, la propriété précédente peut être testée « point par point ».

IV Le produit de deux applications

Soient A' et B' deux ensembles non vides, $f : A \rightarrow A'$ et $g : B \rightarrow B'$.

- 10 La question 1, appliquée aux applications $f \circ \pi_1 : A \times B \rightarrow A'$ et $g \circ \pi_2 : A \times B \rightarrow B'$, fournit une unique application, notée $f \times g : A \times B \rightarrow A' \times B'$.
- (a) Montrer que $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$.
- (b) Montrer que $\text{id}_A \times \text{id}_B = \text{id}_{A \times B}$.
- (c) Si $f_1 : A \rightarrow A'$, $f_2 : A' \rightarrow A''$, $g_1 : B \rightarrow B'$ et $g_2 : B' \rightarrow B''$, montrer que

$$(f_2 \circ f_1) \times (g_2 \circ g_1) = (f_2 \times g_2) \circ (f_1 \times g_1).$$

- (d) Montrer que si f et g sont toutes deux injectives, toutes deux surjectives ou toutes deux bijectives, alors $f \times g$ possède la même propriété. Dans le cas bijectif, déterminer $(f \times g)^{-1}$.

V La construction miroir : réunir sans confondre

On définit l'union disjointe étiquetée

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}),$$

ainsi que

$$i_A : A \rightarrow A \sqcup B, \quad a \mapsto (a, 0), \quad i_B : B \rightarrow A \sqcup B, \quad b \mapsto (b, 1).$$

11 Soit X un ensemble et soient $f : A \rightarrow X, g : B \rightarrow X$.

(a) Construire une application $h : A \sqcup B \rightarrow X$ telle que $h \circ i_A = f$ et $h \circ i_B = g$.

(b) Montrer que cette application est unique.

12 On appelle $(U^\vee)$ la propriété suivante pour un triplet (C, i, j) avec $i : A \rightarrow C$ et $j : B \rightarrow C$: pour tout ensemble X et toutes applications $f : A \rightarrow X, g : B \rightarrow X$, il existe une unique application $h : C \rightarrow X$ telle que $h \circ i = f$ et $h \circ j = g$. Montrer que si (C, i, j) et (D, i', j') possèdent tous deux $(U^\vee)$, alors il existe une unique bijection $\eta : C \rightarrow D$ telle que $\eta \circ i = i'$ et $\eta \circ j = j'$.

13 Résumer en une ou deux phrases la différence de direction entre les propriétés (U) et $(U^\vee)$.

Les propriétés (U) et $(U^\vee)$ sont des propriétés universelles : elles caractérisent un objet par les applications qui passent par lui. Cette idée est centrale en théorie des catégories, qui étudie des structures différentes à travers les mêmes schémas d'applications ; produit et union disjointe en sont ici deux exemples miroirs.