

CORRIGÉ

MPSI · CORRIGÉ

CHAPITRES

Trois façons d'approcher π

Trigonométrie et géométrie ·
Calcul intégral · Probabilités ·
Suites et limites · Algorithmique

I Coincer le cercle entre deux polygones

1

(a) Posons $f(x) = x - \sin x$ sur $[0, \pi/2]$. Alors

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0.$$

La fonction f est croissante et $f(0) = 0$. Pour $x > 0$, on a même $f(x) > 0$. Ainsi

$$\sin x < x.$$

(b) Posons $g(x) = \sin x - x \cos x$. On obtient

$$g'(x) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x.$$

Pour $x \in]0, \pi/2[$, $g'(x) > 0$ et $g(0) = 0$, donc $g(x) > 0$. Ainsi $\sin x > x \cos x$. Comme $\cos x > 0$,

$$x < \tan x.$$

(c) Finalement,

$$\sin x < x < \tan x \quad \text{pour } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

2

(a) Dans le polygone régulier inscrit, un côté sous-tend au centre un angle $2\pi/m$. En coupant le triangle isocèle correspondant en deux, la demi-longueur d'un côté vaut $\sin(\pi/m)$. Le périmètre est donc

$$2m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) = 2\ell_m.$$

Pour le polygone circonscrit, le rayon mené au point de tangence est perpendiculaire au côté. Dans le demi-triangle rectangle obtenu, la demi-longueur d'un côté vaut $\tan(\pi/m)$. Le périmètre est donc

$$2m \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) = 2u_m.$$

(b) Puisque $m \geq 4$,

$$0 < \frac{\pi}{m} \leq \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

La question 1 donne

$$\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) < \frac{\pi}{m} < \tan\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

En multipliant par $m > 0$,

$$\ell_m < \pi < u_m.$$

(c) Pour $m = 4$,

$$\ell_4 = 2\sqrt{2}, \quad u_4 = 4.$$

En particulier, $2\sqrt{2} < \pi < 4$.

IDÉE Le principe géométrique est celui utilisé par Archimède dans *La Mesure du cercle* : encadrer la circonférence par des polygones réguliers inscrits et circonscrits, puis doubler le nombre de côtés. Dans sa proposition 3, Archimède part de l'hexagone et atteint 96 côtés ; nous partons ici du carré. Les formules trigonométriques employées sont une modernisation de ce principe, et non sa notation historique.

3

(a) Les formules d'addition donnent

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

et

$$1 + \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ainsi

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

(b) Posons $x = \pi/m$. Comme

$$\sin x = \frac{\ell_m}{m}, \quad \cos x = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\ell_m}{u_m},$$

on obtient

$$u_{2m} = 2m \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\ell_m}{1 + \ell_m/u_m} = \frac{2\ell_m u_m}{\ell_m + u_m}.$$

(c) Toujours avec $x = \pi/m$,

$$\ell_{2m}^2 = 4m^2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2m^2(1 - \cos x).$$

D'autre part,

$$\ell_m u_{2m} = m \sin x \times 2m \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2m^2(1 - \cos x).$$

Toutes les quantités étant positives,

$$\ell_{2m} = \sqrt{\ell_m u_{2m}}.$$

4 _____

(a) On a

$$a_0 = 2\sqrt{2}, \quad b_0 = 4.$$

Puis, puisque $m_{n+1} = 2m_n$,

$$\boxed{b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_nb_{n+1}}}.$$

Ces relations ne font plus intervenir π .(b) Comme $0 < a_n < b_n$,

$$b_{n+1} > a_n \iff b_n > a_n$$

et

$$b_{n+1} < b_n \iff a_n < b_n.$$

Donc $a_n < b_{n+1} < b_n$. Or $a_{n+1} = \sqrt{a_nb_{n+1}}$ est strictement compris entre a_n et b_{n+1} . Ainsi

$$\boxed{a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n}.$$

(c) Les intervalles $[a_n, b_n]$ sont emboîtés, tous contiennent π , leurs bornes inférieures augmentent et leurs bornes supérieures diminuent.

5 _____

(a) L'identité $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ et la question 1 appliquée à $x/2$ donnent

$$1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{x^2}{2}}.$$

(b) Pour $x = \pi/m$, on a $0 < x \leq \pi/4$, donc

$$\sin x \leq x, \quad 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}, \quad \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi

$$u_m - \ell_m = m \sin x \frac{1 - \cos x}{\cos x} \leq m x \frac{x^2}{2} \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{mx^3}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\pi^3}{\sqrt{2}m^2}}.$$

La question 2(c) donne $\pi < 4$, donc $\pi^3 < 64$, et

$$\frac{\pi^3}{\sqrt{2}m^2} < \boxed{\frac{32\sqrt{2}}{m^2}}.$$

(c) Avec $m_n = 4 \times 2^n$,

$$0 < b_n - a_n < \frac{32\sqrt{2}}{(4 \times 2^n)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{4^n} \longrightarrow 0.$$

Or $0 < \pi - a_n < b_n - a_n$ et $0 < b_n - \pi < b_n - a_n$. Par encadrement,

$$a_n \longrightarrow \pi \quad \text{et} \quad b_n \longrightarrow \pi.$$

(d) Comme $\pi \in [a_n, b_n]$, la distance entre π et le milieu c_n est au plus la demi-largeur :

$$|c_n - \pi| \leq \frac{b_n - a_n}{2} < \frac{\sqrt{2}}{4^n}.$$

6

En itérant les récurrences jusqu'à $n = 6$, donc jusqu'à $m_6 = 256$ côtés, on obtient

$$a_6 \approx 3,1415138011, \quad b_6 \approx 3,1417503692.$$

La largeur est environ $2,36568 \times 10^{-4}$. En arrondissant vers l'extérieur,

$$3,1415 < \pi < 3,1418.$$

II Transformer un angle en somme calculable

7

(a) Sur $] -\pi/2, \pi/2[$, $\cos x \neq 0$. Par dérivation d'un quotient,

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

(b) On a

$$F'(z) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Pour $u \in]0, \pi/4[$,

$$\frac{d}{du} F(\tan u) = F'(\tan u) \tan'(u) = \frac{1}{1 + \tan^2 u} (1 + \tan^2 u) = 1.$$

(c) La fonction $u \mapsto F(\tan u) - u$ a donc une dérivée nulle. Elle vaut 0 en $u = 0$, donc, par continuité jusqu'à $\pi/4$,

$$F(\tan u) = u.$$

Avec $u = \pi/4$ et $\tan(\pi/4) = 1$,

$$F(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

IDÉE La fonction F joue ici le rôle de la fonction réciproque de la tangente sur $[0, \pi/4]$, sans qu'il soit nécessaire d'introduire l'arctangente comme nouvelle fonction.

8

- (a) En multipliant la somme finie par $1 + x^2$,

$$(1 + x^2) \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = 1 + (-1)^n x^{2n+2}.$$

Après ajout du terme de reste, on obtient exactement

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2}.$$

- (b) En intégrant entre 0 et z ,

$$F(z) = T_n(z) + R_n(z),$$

avec

$$R_n(z) = (-1)^{n+1} \int_0^z \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx.$$

L'intégrande étant positive,

$$(-1)^{n+1} R_n(z) \geq 0.$$

De plus $0 \leq x^{2n+2}/(1 + x^2) \leq x^{2n+2}$, donc

$$|R_n(z)| \leq \int_0^z x^{2n+2} dx = \frac{z^{2n+3}}{2n+3}.$$

9

- (a) Comme $\pi/4 = F(1)$, le reste est négatif pour $n = 2p$ et positif pour $n = 2p + 1$. Ainsi

$$4T_{2p+1}(1) < \pi < 4T_{2p}(1).$$

- (b) Les deux sommes ne diffèrent que par le dernier terme :

$$T_{2p}(1) - T_{2p+1}(1) = \frac{1}{4p+3}.$$

La largeur de l'encadrement vaut donc

$$\frac{4}{4p+3}.$$

- (c) On cherche $4/(4p+3) < 10^{-3}$, soit $4p+3 > 4000$. Le plus petit entier convenable est

$$p = 1000.$$

Cette méthode directe exige donc environ deux mille termes pour cette seule garantie de largeur.

10

(a) Puisque F est croissante, $F(z) \in [0, \pi/4]$. La question 7 montre que $F(\tan u) = u$ sur cet intervalle ; la tangente y est strictement croissante et envoie $[0, \pi/4]$ sur $[0, 1]$. On en déduit

$$\boxed{\tan(F(z)) = z}.$$

(b) Les formules d'addition donnent, lorsque le dénominateur est non nul,

$$\boxed{\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}}.$$

(c) Posons $\alpha = F(1/2)$ et $\beta = F(1/3)$. Alors $0 < \alpha + \beta < \pi/2$ et

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \quad \tan \beta = \frac{1}{3}.$$

Donc

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/6} = 1.$$

Sur $]0, \pi/2[$, la tangente est strictement croissante et $\tan(\pi/4) = 1$. Ainsi

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

IDÉE On n'a pas changé la valeur à calculer : on a remplacé une évaluation en 1 par deux évaluations en $1/2$ et $1/3$. Comme le reste contient une puissance z^{2n+3} , cette réécriture va accélérer fortement l'approximation.

11

(a) D'après la question 8,

$$\pi - A_n = 4 \left(R_n \left(\frac{1}{2} \right) + R_n \left(\frac{1}{3} \right) \right).$$

Les deux restes ont le signe $(-1)^{n+1}$. Donc

$$\boxed{A_n > \pi \text{ si } n \text{ est pair,} \quad A_n < \pi \text{ si } n \text{ est impair}}.$$

(b) Par l'inégalité triangulaire,

$$|A_n - \pi| \leq 4 \left(\frac{(1/2)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(1/3)^{2n+3}}{2n+3} \right),$$

soit

$$\boxed{|A_n - \pi| \leq \frac{4}{2n+3} \left(\frac{1}{2^{2n+3}} + \frac{1}{3^{2n+3}} \right)}.$$

(c) Le calcul donne

$$A_5 \approx 3,1415615879, \quad A_6 \approx 3,1415993410.$$

Comme 5 est impair et 6 pair,

$$A_5 < \pi < A_6.$$

En arrondissant vers l'extérieur,

$$\boxed{3,14156 < \pi < 3,14160}.$$

(d) À la question 9, le reste en $z = 1$ ne décroissait que comme l'inverse du nombre de termes. Ici, les facteurs $(1/2)^{2n+3}$ et $(1/3)^{2n+3}$ décroissent géométriquement. Ce n'est donc pas l'identité finie de la question 8 qui a changé, mais la représentation de $\pi/4$ à laquelle on l'applique.

IDÉE La série alternée obtenue pour $z = 1$ est attestée dans la tradition mathématique du Kerala et associée aux travaux de Mādhava. La preuve présentée ici, fondée sur une identité algébrique finie puis une intégration, est une dérivation moderne et autonome.

III Transformer une aire en fréquence

12

(a) Le disque unité a pour aire π et le carré $[-1, 1]^2$ a pour aire 4. D'après le modèle uniforme donné dans l'énoncé,

$$\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4}.$$

La variable B est donc une Bernoulli de paramètre

$$\boxed{p = \frac{\pi}{4}}.$$

(b) Sur un grand nombre de répétitions, la fréquence des succès sert à estimer p . En la multipliant par 4, on obtient une estimation de $4p = \pi$.

13

(a) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\hat{\pi}_N) = \frac{4}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(B_i) = \frac{4}{N} Np = 4p = \boxed{\pi}.$$

(b) Les B_i sont indépendantes et ont chacune pour variance $p(1-p)$. Donc

$$\text{Var}(\hat{\pi}_N) = \frac{16}{N^2} Np(1-p) = \boxed{\frac{16p(1-p)}{N}}.$$

Or, pour $p \in [0, 1]$,

$$p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

donc

$$\boxed{\text{Var}(\hat{\pi}_N) \leq \frac{4}{N}}.$$

14 —

- (a) Bienaymé-Tchebychev appliquée à $Z = \hat{\pi}_N$ donne, puisque $\mathbb{E}(Z) = \pi$,

$$\mathbb{P}(|\hat{\pi}_N - \pi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\hat{\pi}_N)}{\varepsilon^2} \leq \boxed{\frac{4}{N\varepsilon^2}}.$$

- (b) Pour que le risque d'échec soit au plus α , il suffit que

$$\frac{4}{N\varepsilon^2} \leq \alpha.$$

Une condition suffisante est donc

$$\boxed{N \geq \frac{4}{\alpha\varepsilon^2}}.$$

Alors l'intervalle aléatoire $[\hat{\pi}_N - \varepsilon, \hat{\pi}_N + \varepsilon]$ contient π avec une probabilité au moins égale à $1 - \alpha$.

- (c) Pour $\varepsilon = 10^{-3}$ et $\alpha = 0,05$,

$$N \geq \frac{4}{0,05 \times 10^{-6}} = \boxed{80\,000\,000}.$$

Ce nombre très élevé est une garantie suffisante issue d'une inégalité universelle ; il ne signifie pas que 80 millions de points sont en pratique nécessaires pour voir apparaître quelques décimales correctes.

15 —

- (a) Dans le modèle usuel de simulation, `random()` est utilisé comme un tirage uniforme dans $[0, 1[$. L'expression `2 * random() - 1` donne donc une coordonnée uniforme dans $[-1, 1[$. Les deux appels fournissent les coordonnées du point. Le test `x*x + y*y <= 1` compte les succès, donc la valeur renvoyée est

$$\frac{4}{N} \sum_{i=1}^N B_i = \hat{\pi}_N.$$

- (b) Une réalisation isolée est aléatoire. Même si elle tombe très près de π , cela ne démontre pas que son erreur est inférieure à une valeur fixée : une autre réalisation peut être plus éloignée. La question 14 contrôle une probabilité d'erreur avant l'expérience, et non un encadrement déterministe valable pour toute réalisation.

- (c) La borne de Bienaymé-Tchebychev est beaucoup moins efficace numériquement ici que les deux garanties déterministes précédentes. Son intérêt est différent : elle s'applique à une procédure aléatoire très simple et fournit un contrôle du risque avec très peu d'informations sur la loi de l'erreur. Cette universalité se paie par une borne prudente.

IDÉE Il faut distinguer « la simulation donne souvent une bonne valeur » et « on sait démontrer une probabilité d'erreur ». Le premier constat est expérimental ; le second est un théorème.

IV Trois approximations, trois garanties

16

(a) La question 5(d) donne

$$|c_n - \pi| < \frac{\sqrt{2}}{4^n}.$$

Pour $n = 5$, ce majorant vaut environ $1,38 \times 10^{-3} > 10^{-3}$; pour $n = 6$, il vaut environ $3,45 \times 10^{-4} < 10^{-3}$. Le plus petit indice garanti par ce majorant est donc

$$\boxed{n = 6},$$

ce qui correspond à $m_6 = 256$ côtés.

(b) Pour $n = 3$,

$$|A_3 - \pi| \leq \frac{4}{9} \left(\frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} \right) \approx 8,91 \times 10^{-4} < 10^{-3}.$$

Ainsi

$$\boxed{n = 3 \text{ suffit déjà}}.$$

(c) La question 14(c) fournit, avec l'inégalité choisie et un risque de 5%,

$$\boxed{N = 80\,000\,000 \text{ tirages suffisent}}.$$

(d) Les paramètres précédents ne mesurent pas le même coût : un côté de polygone, un terme de somme et un tirage aléatoire ne représentent pas la même opération. La comparaison révèle néanmoins trois idées différentes.

La méthode géométrique encadre π entre les périmètres de deux familles de polygones et produit des suites emboîtées : la garantie est déterministe et chaque doublement du nombre de côtés resserre l'intervalle. La méthode analytique transforme π en intégrale puis en sommes finies ; surtout, elle montre qu'une identité bien choisie peut accélérer radicalement une approximation en remplaçant l'argument 1 par $1/2$ et $1/3$. Enfin, la méthode de Monte-Carlo relie π à une aire et à une fréquence : elle est très simple à programmer et conceptuellement générale, mais sa garantie est probabiliste et, avec le seul outil de Bienaymé-Tchebychev, beaucoup plus coûteuse pour une précision donnée.

Ainsi, « approcher π » peut signifier fabriquer un intervalle certain, contrôler un reste analytique ou accepter un risque quantifié. La qualité d'une approximation ne se mesure donc pas seulement au nombre de décimales affichées, mais aussi à la preuve qui accompagne ces décimales.

SOURCES

T. L. Heath, *Archimedes*, chapitre « The Measurement of a Circle » : présentation de la proposition 3, des polygones inscrits et circonscrits et du calcul jusqu'aux 96 côtés. [Lien direct](#)

T. Hayashi, T. Kusuba et M. Yano, « The Correction of the Mādhava Series for the Circumference of a Circle », *Centaurus* 33 (1990), 149–174. [Lien direct](#)