

CORRIGÉ

MPSI · MP2I · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°02 — Trois façons d'approcher π

Trigonométrie et géométrie ·
Calcul intégral · Probabilités ·
Suites et limites · Algorithmique

I Coincer le cercle entre deux polygones

1

Il faut établir séparément les deux inégalités.

Pour la première, considérons

$$f(x) = x - \sin x.$$

Sur $[0, \pi/2]$,

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0,$$

avec même $f'(x) > 0$ pour $x \in]0, \pi/2]$. Comme $f(0) = 0$, on obtient, pour $x > 0$,

$$\sin x < x.$$

Pour la seconde, on cherche à comparer $\sin x$ à $x \cos x$. Posons

$$g(x) = \sin x - x \cos x.$$

Alors

$$g'(x) = x \sin x > 0$$

pour $x \in]0, \pi/2[$ et $g(0) = 0$. Donc $g(x) > 0$. Comme $\cos x > 0$,

$$\sin x > x \cos x \implies x < \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Finalement,

$$\boxed{\sin x < x < \tan x}.$$

2

(a) Dans le polygone régulier inscrit à m côtés, un côté sous-tend au centre un angle $2\pi/m$. En coupant le triangle isocèle correspondant en deux, la demi-longueur d'un côté vaut $\sin(\pi/m)$. Le périmètre vaut donc

$$2m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) = 2\ell_m.$$

Pour le polygone régulier circonscrit, le rayon mené au point de tangence est perpendiculaire au côté. Le demi-côté vaut alors $\tan(\pi/m)$, donc le périmètre vaut

$$2m \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) = 2u_m.$$

D'après la question 1 appliquée à π/m ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) < \frac{\pi}{m} < \tan\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

En multipliant par $m > 0$,

$$\boxed{\ell_m < \pi < u_m}.$$

(b) Pour $m = 4$,

$$\ell_4 = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}, \quad u_4 = 4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

Ainsi

$$\boxed{2\sqrt{2} < \pi < 4}.$$

IDÉE Le principe géométrique est celui utilisé par Archimède dans *La Mesure du cercle* : encadrer la circonférence par des polygones réguliers inscrits et circonscrits, puis doubler le nombre de côtés. Dans sa proposition 3, Archimède part de l'hexagone et atteint 96 côtés ; nous partons ici du carré. Les formules trigonométriques employées sont une modernisation de ce principe, et non sa notation historique.

3

Posons $x = \pi/m$. On a

$$\sin x = \frac{\ell_m}{m}, \quad \tan x = \frac{u_m}{m}, \quad \cos x = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{\ell_m}{u_m}.$$

Les formules d'addition donnent

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

d'où

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

Ainsi

$$u_{2m} = 2m \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\ell_m}{1 + \ell_m/u_m} = \boxed{\frac{2\ell_m u_m}{\ell_m + u_m}}.$$

Ensuite,

$$\ell_{2m}^2 = 4m^2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2m^2(1 - \cos x).$$

Par ailleurs,

$$\ell_m u_{2m} = m \sin x \times 2m \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2m^2(1 - \cos x).$$

Toutes les quantités étant positives,

$$\ell_{2m} = \sqrt{\ell_m u_{2m}}.$$

Ces deux relations ne font plus intervenir π .

4 _____

(a) Comme

$$a_0 = 2\sqrt{2}, \quad b_0 = 4,$$

la question 3 donne

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_{n+1}}.$$

Puisque $0 < a_n < b_n$,

$$b_{n+1} > a_n \iff b_n > a_n$$

et

$$b_{n+1} < b_n \iff a_n < b_n.$$

Donc

$$a_n < b_{n+1} < b_n.$$

Or a_{n+1} est la moyenne géométrique de a_n et b_{n+1} ; elle est donc strictement comprise entre les deux. Ainsi

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$

Les intervalles $[a_n, b_n]$ sont emboîtés et contiennent tous π .

(b) Posons encore $x = \pi/m$. On dispose déjà de

$$\sin x < x.$$

De plus,

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \leq 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Comme $m \geq 4$, on a $0 < x \leq \pi/4$, donc

$$\cos x \geq \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 u_m - \ell_m &= m \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) \\
 &= m \sin x \frac{1 - \cos x}{\cos x} \\
 &\leq m x \frac{x^2}{2} \sqrt{2} \\
 &= \frac{\pi^3}{\sqrt{2} m^2}.
 \end{aligned}$$

La question 2 donne $\pi < 4$, donc $\pi^3 < 64$ et l'on peut retenir par exemple

$$0 < u_m - \ell_m < \frac{32\sqrt{2}}{m^2}.$$

Pour $m_n = 4 \times 2^n$,

$$0 < b_n - a_n < \frac{32\sqrt{2}}{(4 \times 2^n)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{4^n}.$$

Puisque $a_n < \pi < b_n$,

$$0 < \pi - a_n < b_n - a_n, \quad 0 < b_n - \pi < b_n - a_n.$$

Ainsi

$$\boxed{a_n \longrightarrow \pi}, \quad \boxed{b_n \longrightarrow \pi}.$$

Pour le milieu $c_n = (a_n + b_n)/2$,

$$|c_n - \pi| \leq \frac{b_n - a_n}{2} < \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4^n}}.$$

5

En partant de

$$a_0 = 2\sqrt{2}, \quad b_0 = 4,$$

et en utilisant uniquement les deux récurrences de la question 4, on obtient :

n	a_n	b_n	$b_n - a_n$
5	3,1412772509	3,1422236299	$9,46379 \times 10^{-4}$
6	3,1415138011	3,1417503692	$2,36568 \times 10^{-4}$
7	3,1415729404	3,1416320807	$5,91403 \times 10^{-5}$

La première largeur strictement inférieure à 10^{-4} est donc obtenue pour

$$\boxed{n = 7},$$

avec, par exemple après arrondi vers l'extérieur,

$$\boxed{3,14157 < \pi < 3,14164}.$$

Le majorant général de la question 4 ne garantit une largeur inférieure à 10^{-4} que lorsque

$$\frac{2\sqrt{2}}{4^n} < 10^{-4}.$$

Pour $n = 7$, le membre de gauche vaut environ $1,73 \times 10^{-4}$; le majorant général ne suffit donc pas encore. Pour $n = 8$, il vaut environ $4,32 \times 10^{-5}$. Le calcul effectif des bornes est ici meilleur que le majorant uniforme utilisé pour la preuve.

II Transformer un angle en somme calculable

6

Pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0.$$

La tangente est donc continue et strictement croissante sur $[0, \pi/4]$, avec

$$\tan 0 = 0, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que, pour tout $z \in [0, 1]$, il existe un unique $u \in [0, \pi/4]$ tel que $\tan u = z$.

D'autre part,

$$F'(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Pour $u \in [0, \pi/4]$, considérons

$$H(u) = F(\tan u) - u.$$

Alors

$$H'(u) = \frac{\tan'(u)}{1 + \tan^2 u} - 1 = 0.$$

Comme $H(0) = 0$, on obtient

$$F(\tan u) = u.$$

Pour l'unique réel u tel que $\tan u = z$, cela donne donc $F(z) = u$.

En particulier,

$$F(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}.$$

IDÉE La fonction F joue ici le rôle de la fonction réciproque de la tangente sur $[0, \pi/4]$, sans qu'il soit nécessaire d'introduire l'arctangente comme nouvelle fonction.

7

On compare les dérivées :

$$T'_n(z) = \sum_{k=0}^n (-1)^k z^{2k}.$$

La somme géométrique finie donne

$$(1 + z^2) \sum_{k=0}^n (-1)^k z^{2k} = 1 + (-1)^n z^{2n+2}.$$

Donc

$$\frac{1}{1 + z^2} - T'_n(z) = (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{1 + z^2}.$$

Comme $F(0) = T_n(0) = 0$, l'intégration entre 0 et z donne

$$F(z) = T_n(z) + R_n(z),$$

avec

$$R_n(z) = (-1)^{n+1} \int_0^z \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx.$$

L'intégrande est positive, donc

$$(-1)^{n+1} R_n(z) \geq 0.$$

Enfin,

$$0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} \leq x^{2n+2},$$

d'où

$$|R_n(z)| \leq \frac{z^{2n+3}}{2n+3}.$$

8

Comme $F(1) = \pi/4$, le signe du reste donne, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$4T_{2p+1}(1) < \pi < 4T_{2p}(1).$$

Les deux sommes diffèrent seulement par le dernier terme :

$$T_{2p}(1) - T_{2p+1}(1) = \frac{1}{4p+3}.$$

La largeur vaut donc

$$\frac{4}{4p+3}.$$

Pour qu'elle soit strictement inférieure à 10^{-3} , il faut

$$\frac{4}{4p+3} < 10^{-3},$$

soit $4p+3 > 4000$. Le plus petit entier est

$$\boxed{p = 1000}.$$

Il faut donc calculer $T_{2001}(1)$; $T_{2000}(1)$ en est le préfixe. Comme T_{2001} contient les termes d'indices 0 à 2001, le nombre minimal de termes à calculer est

$$\boxed{2002}.$$

9 _____

D'après la question 6,

$$\tan\left(F\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \frac{1}{p}, \quad \tan\left(F\left(\frac{1}{q}\right)\right) = \frac{1}{q}.$$

Les formules d'addition de sin et cos donnent

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

lorsque le dénominateur est non nul. Pour que la tangente de

$$F\left(\frac{1}{p}\right) + F\left(\frac{1}{q}\right)$$

soit égale à 1, il faut et il suffit que

$$\frac{1/p + 1/q}{1 - 1/(pq)} = 1.$$

Après multiplication par pq ,

$$p + q = pq - 1,$$

donc

$$(p-1)(q-1) = 2.$$

Avec $p, q \geq 2$ entiers, les seules possibilités sont

$$\boxed{(p, q) = (2, 3) \quad \text{ou} \quad (3, 2)}.$$

Comme $F(1/2) + F(1/3) \in]0, \pi/2[$ et que la tangente est strictement croissante sur cet intervalle,

$$\boxed{F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = F(1) = \frac{\pi}{4}}.$$

(a) D'après la question 7,

$$\pi - A_n = 4 \left(R_n \left(\frac{1}{2} \right) + R_n \left(\frac{1}{3} \right) \right).$$

Les deux restes ont le signe $(-1)^{n+1}$. Ainsi

$$\boxed{A_n > \pi \text{ si } n \text{ est pair}}, \quad \boxed{A_n < \pi \text{ si } n \text{ est impair}}.$$

De plus,

$$\boxed{|A_n - \pi| \leq \frac{4}{2n+3} \left(\frac{1}{2^{2n+3}} + \frac{1}{3^{2n+3}} \right)}.$$

(b) Pour $n = 2$, ce majorant vaut environ

$$4,73 \times 10^{-3},$$

alors que pour $n = 3$ il vaut environ

$$8,91 \times 10^{-4}.$$

Le plus petit entier convenable est donc

$$\boxed{n = 3}.$$

(c) Pour un argument $z \in]0, 1]$, deux sommes partielles consécutives $T_{r-1}(z)$ et $T_r(z)$ encadrent $F(z)$, et leur différence en valeur absolue vaut

$$d_r(z) = \frac{z^{2r+1}}{2r+1}.$$

Calculer les deux bornes jusqu'à l'indice r demande $r+1$ termes, puisque la somme d'indice $r-1$ est déjà un préfixe de celle d'indice r .

Si l'on s'arrête aux indices r pour $z = 1/2$ et s pour $z = 1/3$, la largeur de l'encadrement correspondant de π est donc

$$W_{r,s} = 4 \left(\frac{1}{2^{2r+1}(2r+1)} + \frac{1}{3^{2s+1}(2s+1)} \right).$$

Pour avoir $W_{r,s} < 10^{-4}$, chacun des deux termes positifs doit lui-même être strictement inférieur à 10^{-4} . Or

$$\frac{4}{2^{11} \times 11} > 10^{-4}, \quad \frac{4}{3^7 \times 7} > 10^{-4}.$$

Il faut donc nécessairement

$$r \geq 6, \quad s \geq 4.$$

Cela impose au moins

$$(r+1) + (s+1) \geq 7 + 5 = 12$$

termes au total. Pour $r = 6$ et $s = 4$,

$$W_{6,4} = 4 \left(\frac{1}{2^{13} \times 13} + \frac{1}{3^9 \times 9} \right) \approx 6,014 \times 10^{-5} < 10^{-4}.$$

Le minimum est donc bien

$$\boxed{12 \text{ termes au total}}.$$

Comme 6 et 4 sont pairs, les bornes les plus proches sont

$$4 \left(T_5 \left(\frac{1}{2} \right) + T_3 \left(\frac{1}{3} \right) \right) < \pi < 4 \left(T_6 \left(\frac{1}{2} \right) + T_4 \left(\frac{1}{3} \right) \right).$$

Un calcul des deux bornes donne l'encadrement extérieur

$$3,1415410604 < \pi < 3,1416012008.$$

En arrondissant davantage vers l'extérieur,

$$\boxed{3,14154 < \pi < 3,14161}.$$

La largeur de cet encadrement décimal est 7×10^{-5} .

(d) On n'a pas modifié la quantité cherchée. On a remplacé l'évaluation de F en 1 par deux évaluations en $1/2$ et $1/3$. Or le reste contient la puissance z^{2n+3} : lorsque $z < 1$, cette puissance décroît exponentiellement en n . L'accélération vient donc de la représentation choisie avant même d'ajouter davantage de termes.

IDÉE La série alternée obtenue ici est la série classique associée à l'arctangente. Des séries de ce type apparaissent dans la tradition mathématique du Kerala, notamment dans les travaux attribués à Mādhava. La démonstration utilisée ici est moderne et autonome.

III Transformer une aire en fréquence

10

Le disque unité a pour aire π et le carré $[-1, 1]^2$ a pour aire 4. Ainsi

$$\mathbb{P}(B = 1) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc B suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$p = \frac{\pi}{4}.$$

Pour des répétitions indépendantes, la somme

$$S_N = \sum_{i=1}^N B_i$$

vérifie

$$\mathbb{E}(S_N) = Np.$$

L'estimateur naturel est alors

$$\hat{\pi}_N = \frac{4}{N} \sum_{i=1}^N B_i.$$

En effet,

$$\mathbb{E}(\hat{\pi}_N) = \frac{4}{N} Np = 4p = \pi.$$

Par indépendance,

$$\text{Var}(S_N) = Np(1-p),$$

donc

$$\text{Var}(\hat{\pi}_N) = \frac{16}{N^2} Np(1-p) = \frac{16p(1-p)}{N}.$$

Comme

$$p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4},$$

on obtient

$$\text{Var}(\hat{\pi}_N) \leq \frac{4}{N}.$$

11

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $\hat{\pi}_N$ donne

$$\mathbb{P}(|\hat{\pi}_N - \pi| \geq \varepsilon) \leq \frac{4}{N\varepsilon^2}.$$

On souhaite que la probabilité d'échec soit au plus α . Il suffit donc que

$$\frac{4}{N\varepsilon^2} \leq \alpha,$$

soit

$$N \geq \frac{4}{\alpha\varepsilon^2}.$$

Comme N est entier, on peut prendre le plafond du membre de droite.

Pour

$$\varepsilon = 10^{-3}, \quad \alpha = 0,05,$$

on obtient

$$N \geq \frac{4}{0,05 \times 10^{-6}} = 80\,000\,000.$$

Ainsi

$$N = 80\,000\,000$$

tirages suffisent pour assurer, avec l'inégalité utilisée ici, une probabilité d'au moins 95% que l'erreur soit strictement inférieure à 10^{-3} .

12

Une implémentation possible est :

```
from random import random

def approche_pi(N):
    dedans = 0
    for _ in range(N):
        x = 2 * random() - 1
        y = 2 * random() - 1
        if x*x + y*y <= 1:
            dedans += 1
    return 4 * dedans / N
```

La variable `dedans` est une réalisation de $S_N = \sum B_i$. La valeur renvoyée est donc une réalisation de $\hat{\pi}_N$.

Une exécution particulière très proche de π ne constitue pas un encadrement démontré : la valeur obtenue est aléatoire. La propriété démontrée porte sur la probabilité que l'erreur dépasse un seuil fixé avant l'expérience.

La borne de Bienaymé-Tchebychev est universelle : elle ne fait appel qu'à la variance. Cette robustesse se paie par une majoration généralement très pessimiste. Ici, pour une précision de 10^{-3} et un risque d'au plus 5%, elle conduit à 80 millions de tirages. Les méthodes déterministes précédentes obtiennent des bornes d'erreur comparables avec des paramètres beaucoup plus petits. Cela ne signifie pas que chaque tirage de Monte-Carlo « coûte autant » qu'une étape géométrique ou qu'un terme analytique : les opérations ne sont pas de même nature.

IV Trois approximations, trois contrôles de l'erreur

13

Pour la méthode géométrique, la question 4 donne

$$|c_n - \pi| < \frac{\sqrt{2}}{4^n}.$$

On cherche donc

$$\frac{\sqrt{2}}{4^n} < 10^{-3}.$$

Pour $n = 5$, le membre de gauche vaut environ $1,38 \times 10^{-3}$; pour $n = 6$, environ $3,45 \times 10^{-4}$. Le plus petit choix certifié par ce majorant général est donc

$$\boxed{n = 6},$$

ce qui correspond à

$$\boxed{m_6 = 256 \text{ côtés}}.$$

Pour la méthode analytique accélérée, la question 9(a) montre que le premier indice pour lequel le majorant assure

$$|A_n - \pi| < 10^{-3}$$

est

$$n = 3.$$

Chacune des deux sommes $T_3(1/2)$ et $T_3(1/3)$ contient quatre termes. Il faut donc

$$8 \text{ termes au total}.$$

Pour Monte-Carlo avec un risque d'au plus 5%, la question 11 donne

$$N = 80\,000\,000.$$

On peut résumer :

Méthode	Paramètre suffisant pour 10^{-3}	Type de contrôle
Polygones	$m = 256$	borne d'erreur déterministe
Sommes accélérées	8 termes au total	borne d'erreur déterministe
Monte-Carlo	$N = 80\,000\,000$	risque d'erreur $\leq 5\%$

La valeur $m = 256$ vient ici du majorant uniforme de la question 4(b), conformément à l'énoncé de cette question de synthèse. Si l'on exploite plutôt les bornes effectivement calculées à la question 5, l'intervalle $[a_5, b_5]$ a déjà une largeur inférieure à 10^{-3} ; son milieu est donc à moins de 5×10^{-4} de π , avec seulement $m_5 = 128$ côtés. Cette différence mesure précisément le caractère non optimal du majorant général.

La méthode géométrique encadre π entre les périmètres de deux familles de polygones et produit des suites emboîtées. La méthode analytique transforme π en intégrale puis en sommes finies ; surtout, elle montre qu'une identité bien choisie peut accélérer radicalement une approximation en remplaçant l'argument 1 par $1/2$ et $1/3$. Enfin, la méthode de Monte-Carlo relie π à une aire et à une fréquence : elle est très simple à programmer et conceptuellement générale, mais le contrôle obtenu ici est probabiliste et la borne issue de Bienaymé-Tchebychev est très coûteuse pour une précision donnée.

Les trois paramètres ne mesurent pas la même chose : m compte des côtés, le coût analytique compte des termes de sommes rationnelles, et N des expériences aléatoires indépendantes. Ils ne doivent donc pas être lus comme trois temps de calcul directement comparables.

Ainsi, « approcher π » peut signifier fabriquer un intervalle certain, contrôler un reste analytique ou accepter un risque quantifié. La qualité d'une approximation ne se mesure pas seulement au nombre de décimales affichées, mais aussi à la nature de l'estimation d'erreur qui accompagne ces décimales.

SOURCES

T. L. Heath — Archimedes, The Measurement of a Circle. [Lien direct](#)

Hayashi, Kusuba et Yano — The Correction of the Mādhava Series for the Circumference of a Circle. [Lien direct](#)