

Trois façons d'approcher π

Trigonométrie et géométrie ·
Calcul intégral · Probabilités ·
Suites et limites · Algorithmique

Approcher π ne consiste pas seulement à produire des décimales : une approximation devient mathématiquement intéressante lorsqu'on sait expliquer d'où elle vient et ce que vaut son erreur. Dans ce problème, on construira trois procédés très différents — par des polygones, par une intégrale, puis par le hasard — avant de comparer la nature et le coût de leurs garanties.

Dans tout le problème, on définit, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Aucune connaissance préalable sur la fonction tangente n'est supposée. On pourra utiliser les identités usuelles

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

ainsi que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

I Cointer le cercle entre deux polygones

1 Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

- (a) En étudiant la fonction $x \mapsto x - \sin x$, montrer que $\sin x < x$.
- (b) En étudiant la fonction $x \mapsto \sin x - x \cos x$, montrer que $x < \tan x$.
- (c) Conclure que

$$\sin x < x < \tan x.$$

2 On considère le cercle de rayon 1. Pour un entier $m \geq 4$, on note

$$\ell_m = m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right), \quad u_m = m \tan\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

- (a) Expliquer géométriquement pourquoi $2\ell_m$ est le périmètre du polygone régulier à m côtés inscrit dans le cercle et pourquoi $2u_m$ est celui du polygone régulier à m côtés circonscrit au cercle.
- (b) À l'aide de la question 1, montrer que

$$\ell_m < \pi < u_m.$$

- (c) Calculer exactement ℓ_4 et u_4 .

3 L'intérêt de la construction précédente serait limité s'il fallait déjà connaître π pour calculer $\sin(\pi/m)$ et $\tan(\pi/m)$. On va donc fabriquer les encadrements suivants uniquement à partir des précédents.

- (a) Dédurre des formules d'addition que, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

(b) Montrer que

$$u_{2m} = \frac{2\ell_m u_m}{\ell_m + u_m}.$$

(c) Montrer ensuite que

$$\ell_{2m} = \sqrt{\ell_m u_{2m}}.$$

4 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$m_n = 4 \times 2^n, \quad a_n = \ell_{m_n}, \quad b_n = u_{m_n}.$$

(a) Écrire a_0, b_0 puis les relations permettant de calculer a_{n+1} et b_{n+1} à partir de a_n et b_n seulement.

(b) Montrer que, pour tout n ,

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n.$$

(c) Interpréter cette chaîne d'inégalités en termes d'encadrements successifs de π .

5 Il reste à savoir à quelle vitesse l'étau se resserre. Soit $m \geq 4$ et $x = \pi/m$.

(a) Montrer que

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \leq \frac{x^2}{2}.$$

(b) À partir de

$$u_m - \ell_m = m \sin x \frac{1 - \cos x}{\cos x},$$

montrer que

$$0 < u_m - \ell_m \leq \frac{\pi^3}{\sqrt{2} m^2} < \frac{32\sqrt{2}}{m^2}.$$

(c) En déduire que a_n et b_n convergent vers π .

(d) On pose $c_n = (a_n + b_n)/2$. Montrer que

$$|c_n - \pi| < \frac{\sqrt{2}}{4^n}.$$

6 En utilisant uniquement les relations de récurrence de la question 4, calculer a_6 et b_6 à la calculatrice ou avec un court programme, avec suffisamment de chiffres pour obtenir un encadrement décimal de π de largeur inférieure à 3×10^{-4} .

La première méthode construit donc un intervalle déterministe autour de π . La deuxième va conserver cette idée de garantie, mais remplacer les polygones par une intégrale puis par des sommes de nombres rationnels.

II Transformer un angle en somme calculable

7 On commence par donner un rôle analytique à la tangente.

(a) À partir de sa définition, montrer que, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

(b) Pour $z \in [0, 1]$, on définit

$$F(z) = \int_0^z \frac{dt}{1+t^2}.$$

Montrer que la fonction $u \mapsto F(\tan u)$ a pour dérivée 1 sur $]0, \frac{\pi}{4}[$.

(c) En déduire que

$$F(1) = \frac{\pi}{4}.$$

8 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in [0, 1]$, on pose

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1}.$$

(a) Vérifier l'identité finie, valable pour $x \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

(b) En intégrant entre 0 et z , montrer qu'il existe un réel $R_n(z)$ tel que

$$F(z) = T_n(z) + R_n(z),$$

avec

$$(-1)^{n+1} R_n(z) \geq 0 \quad \text{et} \quad |R_n(z)| \leq \frac{z^{2n+3}}{2n+3}.$$

9 Une première idée consiste à prendre directement $z = 1$.

(a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$4T_{2p+1}(1) < \pi < 4T_{2p}(1).$$

(b) Montrer que la largeur de cet encadrement vaut exactement

$$\frac{4}{4p+3}.$$

(c) Déterminer le plus petit entier p qui garantit une largeur strictement inférieure à 10^{-3} .

Cette convergence est certaine, mais lente. Plutôt que d'ajouter des milliers de termes, on va changer la manière d'écrire $\pi/4$.

10 Pour $z \in [0, 1]$, on a déjà $F(z) \in [0, \pi/4]$.

(a) Justifier que

$$\tan(F(z)) = z.$$

(b) À l'aide des formules d'addition, établir, lorsque les deux membres sont définis,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

(c) En prenant $\alpha = F(1/2)$ et $\beta = F(1/3)$, montrer que

$$\frac{\pi}{4} = F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right).$$

11 On définit maintenant

$$A_n = 4 \left(T_n \left(\frac{1}{2} \right) + T_n \left(\frac{1}{3} \right) \right).$$

(a) Montrer que $A_n > \pi$ lorsque n est pair et $A_n < \pi$ lorsque n est impair.

(b) Montrer que

$$|A_n - \pi| \leq \frac{4}{2n+3} \left(\frac{1}{2^{2n+3}} + \frac{1}{3^{2n+3}} \right).$$

(c) Calculer A_5 et A_6 . En déduire un nouvel encadrement décimal de π .

(d) Comparer ce résultat à la question 9 : qu'a-t-on réellement « accéléré » ?

III Transformer une aire en fréquence

La troisième méthode change la nature de la garantie. On choisit au hasard des points dans le carré $[-1, 1]^2$. On admet le modèle suivant : pour un point choisi uniformément dans ce carré, la probabilité d'appartenir à une région est égale au quotient de l'aire de cette région par l'aire du carré.

12 Soit (X, Y) un point choisi selon ce modèle et soit B la variable aléatoire qui vaut 1 si $X^2 + Y^2 \leq 1$, et 0 sinon.

(a) Montrer que B suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$p = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Expliquer pourquoi observer la fréquence des points qui tombent dans le disque peut fournir une approximation de π .

13 On répète l'expérience N fois de façon indépendante. On note $B_1, \dots, B_N$ les variables obtenues et

$$\hat{\pi}_N = \frac{4}{N} \sum_{i=1}^N B_i.$$

- (a) Calculer $\mathbb{E}(\hat{\pi}_N)$.
- (b) Montrer que

$$\text{Var}(\hat{\pi}_N) = \frac{16p(1-p)}{N} \leq \frac{4}{N}.$$

- 14 On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si une variable aléatoire Z possède une espérance et une variance, alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(Z)}{\varepsilon^2}.$$

- (a) Montrer que

$$\mathbb{P}(|\hat{\pi}_N - \pi| \geq \varepsilon) \leq \frac{4}{N\varepsilon^2}.$$

- (b) Pour un risque $\alpha \in]0, 1[$, donner une condition suffisante sur N pour que l'intervalle aléatoire

$$[\hat{\pi}_N - \varepsilon, \hat{\pi}_N + \varepsilon]$$

contienne π avec une probabilité au moins égale à $1 - \alpha$.

- (c) Combien de tirages cette garantie demande-t-elle pour $\varepsilon = 10^{-3}$ et un risque de 5% ?

- 15 On considère le programme suivant.

```
from random import random

def approche_pi(N):
    dedans = 0
    for _ in range(N):
        x = 2 * random() - 1
        y = 2 * random() - 1
        if x*x + y*y <= 1:
            dedans += 1
    return 4 * dedans / N
```

- (a) Expliquer pourquoi la valeur renvoyée est une réalisation de $\hat{\pi}_N$.
- (b) Une exécution donne un nombre très proche de π . Pourquoi cela ne constitue-t-il pas, à lui seul, un encadrement démontré de π ?
- (c) Le majorant obtenu à la question 14 est volontairement universel. Que peut-on dire de la qualité de cette garantie par rapport aux deux méthodes déterministes précédentes ?

IV Trois approximations, trois garanties

- 16 On veut maintenant comparer les méthodes en visant une erreur au plus égale à 10^{-3} .

- (a) Pour la méthode des polygones, déterminer le plus petit n que le majorant de la question 5(d) permet de choisir afin de garantir $|c_n - \pi| < 10^{-3}$.
- (b) Vérifier que, pour la méthode analytique accélérée, le majorant de la question 11(b) est déjà inférieur à 10^{-3} pour $n = 3$.
- (c) Pour la méthode de Monte-Carlo, rappeler le nombre de tirages suffisant obtenu à la question 14(c) pour une garantie à 95%.

(d) Les paramètres m_n , n et N ne comptent pas les mêmes opérations. Malgré cela, rédiger une courte synthèse expliquant ce que révèle chacune des trois approches sur π , et distinguer clairement garantie déterministe et garantie probabiliste.