

CORRIGÉ

PC · CORRIGÉ

CHAPITRES

L'oscillateur vu de quatre façons

Équations différentielles · Nombres complexes · Matrices et systèmes linéaires · Suites récurrentes · Analyse asymptotique

Le problème compare quatre représentations d'une même équation différentielle : expression explicite, invariant quadratique, coordonnée complexe puis systèmes récurrents. Les trois premières descriptions sont exactes ; la dernière permet de comparer une restriction exacte à deux discrétisations.

I Résoudre et paramétrer les solutions

1.

L'équation caractéristique associée à

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

est $r^2 + \omega^2 = 0$. Les solutions réelles sont donc

$$x(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t).$$

Les conditions initiales donnent

$$C = x_0, \quad D = \frac{v_0}{\omega},$$

d'où

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Posons

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Si $A = 0$, alors $x_0 = v_0 = 0$ et x est identiquement nulle.

Supposons $A > 0$. Il existe un réel φ , unique modulo 2π , tel que

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A}, \quad \sin \varphi = \frac{v_0}{\omega A}.$$

Ainsi

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Puis

$$x'(t) = -A\omega \sin(\omega t - \varphi),$$

donc

$$\boxed{x(\mathbb{R}) = [-A, A]}, \quad \boxed{\max_{t \in \mathbb{R}} |x'(t)| = \omega A},$$

et la plus petite période strictement positive est

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}.$$

Pour la solution nulle, l'image est $\{0\}$ et toute valeur strictement positive est une période ; il n'existe donc pas de plus petite période strictement positive.

II Invariant quadratique et courbe de niveau

2.

On a

$$I_{\alpha,\beta}(t) = \alpha x'(t)^2 + \beta x(t)^2.$$

Sa dérivée vaut, puisque $x'' = -\omega^2 x$,

$$\begin{aligned} I'_{\alpha,\beta}(t) &= 2\alpha x'(t)x''(t) + 2\beta x(t)x'(t) \\ &= 2(\beta - \alpha\omega^2)x(t)x'(t). \end{aligned}$$

Si $\beta = \alpha\omega^2$, cette expression est nulle pour toute solution.

Réciproquement, supposons $I_{\alpha,\beta}$ constant pour toute solution. On choisit des conditions initiales telles que $x_0 v_0 \neq 0$. Alors

$$0 = I'_{\alpha,\beta}(0) = 2(\beta - \alpha\omega^2)x_0 v_0,$$

d'où

$$\beta = \alpha\omega^2.$$

Les couples cherchés sont donc

$$\boxed{(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha\omega^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}.}$$

Pour $\alpha = 1$, on obtient l'invariant

$$\boxed{H(t) = x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2}$$

et

$$\boxed{H(t) = v_0^2 + \omega^2 x_0^2 = \omega^2 A^2.}$$

3.

Avec $y = x'/\omega$, l'égalité précédente devient

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

D'autre part,

$$\begin{cases} x' = \omega y, \\ y' = -\omega x. \end{cases}$$

Ainsi, pour $U = (x, y)^\top$,

$$\|U(t)\| = A$$

et

$$\|U'(t)\| = \omega \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \boxed{\omega A}.$$

De plus,

$$\det(U(t), U'(t)) = xy' - yx' = -\omega(x^2 + y^2) = -\omega A^2 < 0.$$

Le paramétrage est donc orienté dans le sens horaire.

Pour voir que l'image est le cercle entier et retrouver la période sans reprendre la formule de la question 1, introduisons un argument continu $\vartheta(t)$ de $U(t)$. Comme $\|U(t)\| = A > 0$,

$$\vartheta'(t) = \frac{\det(U(t), U'(t))}{\|U(t)\|^2} = -\omega.$$

Par conséquent

$$\vartheta(t) = \vartheta(0) - \omega t.$$

Lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, l'argument parcourt toutes les valeurs modulo 2π :

$$\boxed{U(\mathbb{R}) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 ; X^2 + Y^2 = A^2\}.$$

La plus petite variation positive de t qui modifie l'argument d'un multiple de 2π est

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}.$$

Dans les coordonnées (x, x') , l'image est l'ellipse

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{x'^2}{\omega^2 A^2} = 1.}$$

Le changement $y = x'/\omega$ transforme cette ellipse en cercle en normalisant les deux coordonnées.

III Coordonnée complexe et rotation

4.

Pour

$$z_c = x + icx',$$

on a

$$z'_c = x' - ic\omega^2 x.$$

L'identité $z'_c = \lambda z_c$ doit être valable indépendamment des valeurs de x et x' à l'instant considéré. L'identification des coefficients donne

$$\lambda = -ic\omega^2, \quad ic\lambda = 1.$$

La seconde relation donne $\lambda = -i/c$. En la combinant avec la première,

$$c^2\omega^2 = 1.$$

Ainsi

$$(c, \lambda) = \left(\frac{1}{\omega}, -i\omega\right) \quad \text{ou} \quad \left(-\frac{1}{\omega}, i\omega\right).$$

5.

Avec

$$z = x + i\frac{x'}{\omega},$$

on a

$$z' = -i\omega z.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}(e^{i\omega t}z(t)) = 0,$$

et

$$z(t) = z(0)e^{-i\omega t}.$$

Or

$$z(0) = x_0 + i\frac{v_0}{\omega} = Ae^{i\varphi},$$

d'où

$$z(t) = Ae^{i(\varphi - \omega t)}.$$

Cette formule donne simultanément

$$|z| = A,$$

l'argument initial φ , l'orientation horaire, la période $2\pi/\omega$ et

$$H = \omega^2|z|^2 = \omega^2 A^2.$$

6.

(a) Comme $a = \omega h$,

$$Z_{n+1}^{\text{ex}} = z((n+1)h) = e^{-ia}z(nh),$$

donc

$$Z_{n+1}^{\text{ex}} = e^{-ia} Z_n^{\text{ex}}.$$

Dans les coordonnées réelles,

$$\begin{pmatrix} X_{n+1}^{\text{ex}} \\ Y_{n+1}^{\text{ex}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n^{\text{ex}} \\ Y_n^{\text{ex}} \end{pmatrix}.$$

(b) On dispose des deux relations

$$Z_{n+1}^{\text{ex}} = e^{-ia} Z_n^{\text{ex}}, \quad Z_{n-1}^{\text{ex}} = e^{ia} Z_n^{\text{ex}}.$$

En les additionnant puis en prenant les parties réelles,

$$X_{n+1}^{\text{ex}} = 2 \cos(a) X_n^{\text{ex}} - X_{n-1}^{\text{ex}} \quad (n \geq 1).$$

Cette démonstration ne divise pas par $\sin a$; la relation reste valable pour toute valeur de a .

(c) Si $Z_0^{\text{ex}} \neq 0$, alors

$$Z_{n+q}^{\text{ex}} = Z_n^{\text{ex}}$$

pour tout n si et seulement si

$$e^{-iaq} = 1,$$

soit

$$aq \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

La suite est donc périodique exactement lorsque

$$\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Si $a/(2\pi) = p/q$ est irréductible, alors q est une période. Si $1 \leq k < q$ en était une autre, on aurait $pk/q \in \mathbb{Z}$, donc $q \mid k$, contradiction. La plus petite période en nombre de pas est donc

$$q.$$

IV Systèmes discrets : invariants et stabilité

7.

On calcule

$$\begin{aligned} R_{n+1}^2 &= (X_n^{\text{E}} + aY_n^{\text{E}})^2 + (Y_n^{\text{E}} - aX_n^{\text{E}})^2 \\ &= (1 + a^2)R_n^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$R_n^2 = (1 + a^2)^n R_0^2.$$

Comme $a > 0$, toute donnée initiale non nulle vérifie

$$R_n \longrightarrow +\infty.$$

Ce système discret ne conserve donc pas la norme associée à l'invariant continu H ; il l'amplifie géométriquement.

8.

Le système (S) s'écrit

$$Y_{n+1} = Y_n - aX_n$$

et

$$X_{n+1} = X_n + a(Y_n - aX_n) = (1 - a^2)X_n + aY_n.$$

Ainsi

$$S_a = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\det S_a = 1.$$

De

$$X_n = (1 - a^2)X_{n-1} + aY_{n-1}$$

et

$$Y_n = Y_{n-1} - aX_{n-1},$$

on tire

$$aY_n = X_n - X_{n-1}.$$

En reportant dans l'expression de X_{n+1} ,

$$X_{n+1} = (1 - a^2)X_n + X_n - X_{n-1},$$

d'où

$$X_{n+1} = (2 - a^2)X_n - X_{n-1}.$$

9.

Posons

$$q(X, Y) = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2.$$

L'invariance pour toutes les données initiales signifie

$$q(S_a(X, Y)) = q(X, Y)$$

comme identité polynomiale en X et Y . Or

$$S_a(X, Y) = ((1 - a^2)X + aY, -aX + Y).$$

En développant et en identifiant les coefficients, on obtient, puisque $a > 0$,

$$\gamma = \alpha, \quad \beta = -a\alpha.$$

Réciproquement, ces relations rendent bien la forme invariante. Les triplets cherchés sont donc

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, -a, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On choisit la normalisation

$$Q_a(X, Y) = X^2 - aXY + Y^2.$$

Elle se réécrit

$$Q_a(X, Y) = \left(X - \frac{a}{2}Y\right)^2 + \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)Y^2.$$

Pour $0 < a < 2$, Q_a est définie positive. Il existe alors des constantes $m_a, M_a > 0$ telles que

$$m_a(X^2 + Y^2) \leq Q_a(X, Y) \leq M_a(X^2 + Y^2),$$

et la conservation de Q_a impose la bornitude de tous les itérés. Les courbes

$$Q_a(X, Y) = c, \quad c > 0,$$

sont des ellipses centrées en l'origine.

Pour $a = 2$,

$$Q_2(X, Y) = (X - Y)^2,$$

qui ne contrôle pas la norme euclidienne. Pour $a > 2$, la forme est indéfinie. Ainsi la conservation de Q_a contrôle la norme de tous les itérés exactement pour

$$0 < a < 2.$$

10.

La récurrence est

$$X_{n+1} - (2 - a^2)X_n + X_{n-1} = 0.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P_a(r) = r^2 - (2 - a^2)r + 1.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta_a = (2 - a^2)^2 - 4 = a^2(a^2 - 4).$$

Si $0 < a < 2$, les deux racines sont complexes conjuguées, leur produit vaut 1, donc leur module vaut 1. Elles sont distinctes ; toutes les suites (X_n) sont bornées. Comme

$$Y_n = \frac{X_{n+1} - (1 - a^2)X_n}{a},$$

les suites (Y_n) le sont aussi.

Si $a = 2$, on a

$$P_2(r) = (r + 1)^2.$$

La récurrence admet des solutions de la forme

$$X_n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Des données initiales avec $B \neq 0$ donnent donc une suite non bornée.

Si $a > 2$, les deux racines sont réelles distinctes et de produit 1. Leur somme vaut $2 - a^2 < -2$; l'une des deux a donc un module strictement supérieur à 1. Il existe des données initiales pour lesquelles (X_n) , puis (X_n, Y_n) , n'est pas bornée.

Comme $a > 0$, les valeurs X_0 et X_1 peuvent être choisies arbitrairement en choisissant convenablement Y_0 ; aucune solution de la récurrence pertinente n'est exclue.

Ainsi

toutes les suites de (S) sont bornées $\iff 0 < a < 2$.
--

On retrouve exactement la condition issue de Q_a . En revanche,

$$\det S_a = 1$$

pour tout $a > 0$, y compris dans les régimes non bornés. La conservation du déterminant ne suffit donc pas à assurer la stabilité des itérés.

11.

Pour $0 < a < 2$, les racines de P_a ont module 1 et ne sont pas réelles. Il existe donc un unique $\theta \in (0, \pi)$ tel qu'elles soient $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Leur somme donne

$$2 \cos \theta = 2 - a^2,$$

soit

$\cos \theta = 1 - \frac{a^2}{2}.$

Comme

$$1 - \frac{a^2}{2} = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

et $0 < \theta/2 < \pi/2$, on obtient

$\theta = 2 \arcsin \left(\frac{a}{2} \right).$
--

La forme générale est donc

$$X_n = A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta).$$

Pour $u \in (0, 1)$, on a $\arcsin u > u$. Ainsi

$$\theta = 2 \arcsin(a/2) > a.$$

Comme $a = \omega h$,

$$\frac{\omega_h}{\omega} = \frac{\theta/h}{a/h} = \frac{\theta}{a} > 1.$$

Pour a proche de 0, l'expansion

$$\arcsin u = u + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

donne

$$\theta = 2 \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{6} \frac{a^3}{8} + o(a^3) \right) = a + \frac{a^3}{24} + o(a^3).$$

Par conséquent

$$\frac{\omega_h}{\omega} = 1 + \frac{a^2}{24} + o(a^2).$$

D'autre part,

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} + o(a^4),$$

donc

$$2 \cos a = 2 - a^2 + \frac{a^4}{12} + o(a^4).$$

La récurrence exacte est

$$X_{n+1}^{\text{ex}} = 2 \cos(a) X_n^{\text{ex}} - X_{n-1}^{\text{ex}},$$

alors que (S) donne

$$X_{n+1} = (2 - a^2) X_n - X_{n-1}.$$

Leurs coefficients commencent donc à différer à l'ordre a^4 :

$$2 \cos a - (2 - a^2) = \frac{a^4}{12} + o(a^4).$$

Cette petite erreur locale sur le coefficient modifie l'angle par pas de a à

$$\theta = a + \frac{a^3}{24} + o(a^3),$$

ce qui produit une erreur relative d'ordre a^2 sur la quantité ω_h/ω .

V Synthèse des représentations

12.

La première représentation est la solution réelle $x(t)$ elle-même :

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Elle rend immédiatement accessibles les valeurs de la solution, son image, son amplitude et sa période.

La deuxième représentation utilise le vecteur

$$U(t) = \left(x(t), \frac{x'(t)}{\omega} \right).$$

L'invariant H devient la conservation de $\|U(t)\|^2$; les solutions non constantes sont des paramétrages uniformes de cercles. Dans les coordonnées (x, x') , ces mêmes courbes sont des ellipses.

La troisième représentation identifie U au nombre complexe

$$z = x + i \frac{x'}{\omega}.$$

Toute l'évolution se réduit alors à une multiplication :

$$z(t) = z(0)e^{-i\omega t}.$$

La restriction exacte aux instants nh devient la rotation discrète

$$Z_{n+1}^{\text{ex}} = e^{-ia} Z_n^{\text{ex}}.$$

Enfin, la quatrième représentation remplace cette restriction exacte par des systèmes récurrents. Le premier fait croître la norme par le facteur $1 + a^2$ à chaque étape. Le second conserve la forme quadratique

$$Q_a(X, Y) = X^2 - aXY + Y^2$$

et possède des itérés tous bornés exactement lorsque $0 < a < 2$. Dans ce domaine, il remplace l'angle exact a par

$$\theta = 2 \arcsin(a/2),$$

ce qui préserve qualitativement une rotation bornée mais déforme sa phase.

Les quatre descriptions ne sont donc pas quatre problèmes différents : elles montrent comment un changement de représentation peut transformer une même relation en formule explicite, conservation géométrique, multiplication complexe ou récurrence.

SOURCES

E. Hairer, C. Lubich et G. Wanner, *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer, 2e éd., 2006. [Lien direct](#)