

CORRIGÉ

PC · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°01 — L'oscillateur vu de quatre façons

Équations différentielles · Nombres complexes · Matrices et systèmes linéaires · Suites récurrentes · Analyse asymptotique

Le problème compare quatre représentations d'une même équation différentielle : expression explicite, invariant quadratique, coordonnée complexe puis systèmes récurrents. Les trois premières descriptions sont exactes ; la dernière permet de comparer une restriction exacte à deux discrétisations.

I Résoudre et paramétrer les solutions

1.

L'équation caractéristique associée à

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

est $r^2 + \omega^2 = 0$. Les solutions réelles sont donc

$$x(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t).$$

Les conditions initiales donnent

$$C = x_0, \quad D = \frac{v_0}{\omega},$$

d'où

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Posons

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Si $A = 0$, alors $x_0 = v_0 = 0$ et x est identiquement nulle.

Supposons $A > 0$. Il existe un réel φ , unique modulo 2π , tel que

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{A}, \quad \sin \varphi = \frac{v_0}{\omega A}.$$

Ainsi

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Puis

$$x'(t) = -A\omega \sin(\omega t - \varphi),$$

donc

$$\boxed{x(\mathbb{R}) = [-A, A]}, \quad \boxed{\max_{t \in \mathbb{R}} |x'(t)| = \omega A},$$

et la plus petite période strictement positive est

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}.$$

Pour la solution nulle, l'image est $\{0\}$ et toute valeur strictement positive est une période ; il n'existe donc pas de plus petite période strictement positive.

II Invariant quadratique et courbe de niveau

2.

On a

$$I_{\alpha,\beta}(t) = \alpha x'(t)^2 + \beta x(t)^2.$$

Sa dérivée vaut, puisque $x'' = -\omega^2 x$,

$$\begin{aligned} I'_{\alpha,\beta}(t) &= 2\alpha x'(t)x''(t) + 2\beta x(t)x'(t) \\ &= 2(\beta - \alpha\omega^2)x(t)x'(t). \end{aligned}$$

Si $\beta = \alpha\omega^2$, cette expression est nulle pour toute solution.

Réciproquement, supposons $I_{\alpha,\beta}$ constant pour toute solution. On choisit des conditions initiales telles que $x_0 v_0 \neq 0$. Alors

$$0 = I'_{\alpha,\beta}(0) = 2(\beta - \alpha\omega^2)x_0 v_0,$$

d'où

$$\beta = \alpha\omega^2.$$

Les couples cherchés sont donc

$$\boxed{(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha\omega^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}.}$$

Pour $\alpha = 1$, on obtient l'invariant

$$\boxed{H(t) = x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2}$$

et

$$\boxed{H(t) = v_0^2 + \omega^2 x_0^2 = \omega^2 A^2.}$$

3.

Avec $y = x'/\omega$, l'égalité précédente devient

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

D'autre part,

$$\begin{cases} x' = \omega y, \\ y' = -\omega x. \end{cases}$$

Ainsi, pour $U = (x, y)^\top$,

$$\|U(t)\| = A$$

et

$$\|U'(t)\| = \omega \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \boxed{\omega A}.$$

De plus,

$$\det(U(t), U'(t)) = xy' - yx' = -\omega(x^2 + y^2) = -\omega A^2 < 0.$$

Le paramétrage est donc orienté dans le sens horaire.

Pour déterminer l'image et la période sans reprendre la formule explicite de la question 1, posons

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Le système précédent s'écrit

$$U' = -\omega JU.$$

Comme $R'(t) = \omega JR(t)$ et que J commute avec $R(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(R(t)U(t)) &= R'(t)U(t) + R(t)U'(t) \\ &= \omega JR(t)U(t) - \omega R(t)JU(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$R(t)U(t) = U(0),$$

puis

$$\boxed{U(t) = R(-t)U(0).}$$

La notation $R(-t)$ désigne ici la rotation d'angle $-\omega t$. Lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, cet angle parcourt toutes les valeurs réelles. Pour $A > 0$, l'image est donc le cercle entier :

$$\boxed{U(\mathbb{R}) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2; X^2 + Y^2 = A^2\}.$$

Une rotation fixe le vecteur non nul $U(0)$ exactement lorsque son angle est un multiple de 2π . La plus petite période strictement positive de U est donc

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}.$$

Dans les coordonnées (x, x') , l'image est l'ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{x'^2}{\omega^2 A^2} = 1.$$

Le changement $y = x'/\omega$ transforme cette ellipse en cercle en normalisant les deux coordonnées.

III Coordonnée complexe et rotation

4.

Pour

$$z_c = x + icx',$$

on a

$$z'_c = x' - ic\omega^2 x.$$

L'identité $z'_c = \lambda z_c$ doit être valable indépendamment des valeurs de x et x' à l'instant considéré. L'identification des coefficients donne

$$\lambda = -ic\omega^2, \quad ic\lambda = 1.$$

La seconde relation donne $\lambda = -i/c$. En la combinant avec la première,

$$c^2\omega^2 = 1.$$

Ainsi

$$(c, \lambda) = \left(\frac{1}{\omega}, -i\omega\right) \quad \text{ou} \quad \left(-\frac{1}{\omega}, i\omega\right).$$

5.

Avec

$$z = x + i\frac{x'}{\omega},$$

on a

$$z' = -i\omega z.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}(e^{i\omega t} z(t)) = 0,$$

et

$$z(t) = z(0)e^{-i\omega t}.$$

Or

$$z(0) = x_0 + i\frac{v_0}{\omega} = Ae^{i\varphi},$$

d'où

$$z(t) = Ae^{i(\varphi - \omega t)}.$$

Cette formule donne simultanément

$$|z| = A,$$

l'argument initial φ , l'orientation horaire, la période $2\pi/\omega$ et

$$H = \omega^2 |z|^2 = \omega^2 A^2.$$

6.

(a) Comme $a = \omega h$,

$$Z_{n+1}^{\text{ex}} = z((n+1)h) = e^{-ia} z(nh),$$

donc

$$Z_{n+1}^{\text{ex}} = e^{-ia} Z_n^{\text{ex}}.$$

Dans les coordonnées réelles,

$$\begin{pmatrix} X_{n+1}^{\text{ex}} \\ Y_{n+1}^{\text{ex}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n^{\text{ex}} \\ Y_n^{\text{ex}} \end{pmatrix}.$$

(b) On dispose des deux relations

$$Z_{n+1}^{\text{ex}} = e^{-ia} Z_n^{\text{ex}}, \quad Z_{n-1}^{\text{ex}} = e^{ia} Z_n^{\text{ex}}.$$

En les additionnant puis en prenant les parties réelles,

$$X_{n+1}^{\text{ex}} = 2 \cos(a) X_n^{\text{ex}} - X_{n-1}^{\text{ex}} \quad (n \geq 1).$$

Cette démonstration ne divise pas par $\sin a$; la relation reste valable pour toute valeur de a .

(c) Si $Z_0^{\text{ex}} \neq 0$, alors

$$Z_{n+q}^{\text{ex}} = Z_n^{\text{ex}}$$

pour tout n si et seulement si

$$e^{-iaq} = 1,$$

soit

$$aq \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

La suite est donc périodique exactement lorsque

$$\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Si $a/(2\pi) = p/q$ est irréductible, alors q est une période. Si $1 \leq k < q$ en était une autre, on aurait $pk/q \in \mathbb{Z}$, donc $q \mid k$, contradiction. La plus petite période en nombre de pas est donc

$$q.$$

IV Systèmes discrets : invariants et stabilité

7.

On calcule

$$\begin{aligned} R_{n+1}^2 &= (X_n^E + aY_n^E)^2 + (Y_n^E - aX_n^E)^2 \\ &= (1 + a^2)R_n^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$R_n^2 = (1 + a^2)^n R_0^2.$$

Comme $a > 0$, toute donnée initiale non nulle vérifie

$$R_n \longrightarrow +\infty.$$

Ce système discret ne conserve donc pas la norme associée à l'invariant continu H ; il l'amplifie géométriquement.

8.

Le système (S) s'écrit

$$Y_{n+1} = Y_n - aX_n$$

et

$$X_{n+1} = X_n + a(Y_n - aX_n) = (1 - a^2)X_n + aY_n.$$

Ainsi

$$S_a = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\det S_a = 1.$$

De

$$X_n = (1 - a^2)X_{n-1} + aY_{n-1}$$

et

$$Y_n = Y_{n-1} - aX_{n-1},$$

on tire

$$aY_n = X_n - X_{n-1}.$$

En reportant dans l'expression de X_{n+1} ,

$$X_{n+1} = (1 - a^2)X_n + X_n - X_{n-1},$$

d'où

$$\boxed{X_{n+1} = (2 - a^2)X_n - X_{n-1}.}$$

9.

Posons

$$q(X, Y) = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2.$$

L'invariance pour toutes les données initiales signifie

$$q(S_a(X, Y)) = q(X, Y)$$

comme identité polynomiale en X et Y . Or

$$S_a(X, Y) = ((1 - a^2)X + aY, -aX + Y).$$

En développant et en identifiant les coefficients, on obtient, puisque $a > 0$,

$$\gamma = \alpha, \quad \beta = -a\alpha.$$

Réciproquement, ces relations rendent bien la forme invariante. Les triplets cherchés sont donc

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(1, -a, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.}$$

On choisit la normalisation

$$\boxed{Q_a(X, Y) = X^2 - aXY + Y^2.}$$

Elle se réécrit

$$Q_a(X, Y) = \left(X - \frac{a}{2}Y\right)^2 + \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)Y^2.$$

Pour $0 < a < 2$, Q_a est définie positive. Il existe alors des constantes $m_a, M_a > 0$ telles que

$$m_a(X^2 + Y^2) \leq Q_a(X, Y) \leq M_a(X^2 + Y^2),$$

et la conservation de Q_a impose la bornitude de tous les itérés. Les courbes

$$Q_a(X, Y) = c, \quad c > 0,$$

sont des ellipses centrées en l'origine.

Pour $a = 2$,

$$Q_2(X, Y) = (X - Y)^2,$$

qui ne contrôle pas la norme euclidienne. Pour $a > 2$, la forme est indéfinie. Ainsi la conservation de Q_a contrôle la norme de tous les itérés exactement pour

$$0 < a < 2.$$

10.

La récurrence est

$$X_{n+1} - (2 - a^2)X_n + X_{n-1} = 0.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P_a(r) = r^2 - (2 - a^2)r + 1.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta_a = (2 - a^2)^2 - 4 = a^2(a^2 - 4).$$

Si $0 < a < 2$, les deux racines sont complexes conjuguées, leur produit vaut 1, donc leur module vaut 1. Elles sont distinctes ; toutes les suites (X_n) sont bornées. Comme

$$Y_n = \frac{X_{n+1} - (1 - a^2)X_n}{a},$$

les suites (Y_n) le sont aussi.

Si $a = 2$, on a

$$P_2(r) = (r + 1)^2.$$

La récurrence admet des solutions de la forme

$$X_n = (A + Bn)(-1)^n.$$

Des données initiales avec $B \neq 0$ donnent donc une suite non bornée.

Si $a > 2$, les deux racines sont réelles distinctes et de produit 1. Leur somme vaut $2 - a^2 < -2$; l'une des deux a donc un module strictement supérieur à 1. Il existe des données initiales pour lesquelles (X_n) , puis (X_n, Y_n) , n'est pas bornée.

Comme $a > 0$, les valeurs X_0 et X_1 peuvent être choisies arbitrairement en choisissant convenablement Y_0 ; aucune solution de la récurrence pertinente n'est exclue.

Ainsi

$$\text{toutes les suites de } (S) \text{ sont bornées} \iff 0 < a < 2.$$

On retrouve exactement la condition issue de Q_a . En revanche,

$$\det S_a = 1$$

pour tout $a > 0$, y compris dans les régimes non bornés. La conservation du déterminant ne suffit donc pas à assurer la stabilité des itérés.

11.

Pour $0 < a < 2$, les racines de P_a ont module 1 et ne sont pas réelles. Il existe donc un unique $\theta \in (0, \pi)$ tel qu'elles soient $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Leur somme donne

$$2 \cos \theta = 2 - a^2,$$

soit

$$\cos \theta = 1 - \frac{a^2}{2}.$$

Comme

$$1 - \frac{a^2}{2} = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

et $0 < \theta/2 < \pi/2$, on obtient

$$\theta = 2 \arcsin \left(\frac{a}{2} \right).$$

La forme générale est donc

$$X_n = A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta).$$

Pour $u \in (0, 1)$, on a $\arcsin u > u$. Ainsi

$$\theta = 2 \arcsin(a/2) > a.$$

Comme $a = \omega h$,

$$\frac{\omega_h}{\omega} = \frac{\theta/h}{a/h} = \frac{\theta}{a} > 1.$$

Pour obtenir le développement nécessaire sans supposer connu celui de $\arcsin$, posons $f(u) = \arcsin u$ au voisinage de 0. On a

$$f'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad f''(u) = \frac{u}{(1-u^2)^{3/2}},$$

et

$$f'''(u) = \frac{1+2u^2}{(1-u^2)^{5/2}}.$$

Ainsi

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 1.$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 donne donc

$$\arcsin u = u + \frac{u^3}{6} + o(u^3).$$

Avec $u = a/2$,

$$\theta = 2 \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{6} \frac{a^3}{8} + o(a^3) \right) = a + \frac{a^3}{24} + o(a^3).$$

Par conséquent

$$\frac{\omega_h}{\omega} = 1 + \frac{a^2}{24} + o(a^2).$$

D'autre part,

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} + o(a^4),$$

donc

$$2 \cos a = 2 - a^2 + \frac{a^4}{12} + o(a^4).$$

La récurrence exacte est

$$X_{n+1}^{\text{ex}} = 2 \cos(a) X_n^{\text{ex}} - X_{n-1}^{\text{ex}},$$

alors que (S) donne

$$X_{n+1} = (2 - a^2) X_n - X_{n-1}.$$

Leurs coefficients commencent donc à différer à l'ordre a^4 :

$$2 \cos a - (2 - a^2) = \frac{a^4}{12} + o(a^4).$$

Cette petite erreur locale sur le coefficient modifie l'angle par pas de a à

$$\theta = a + \frac{a^3}{24} + o(a^3),$$

ce qui produit une erreur relative d'ordre a^2 sur la quantité ω_h/ω .

V Synthèse des représentations

12.

La première représentation est la solution réelle $x(t)$ elle-même :

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Elle rend immédiatement accessibles les valeurs de la solution, son image, son amplitude et sa période.

La deuxième représentation utilise le vecteur

$$U(t) = \left(x(t), \frac{x'(t)}{\omega} \right).$$

L'invariant H devient la conservation de $\|U(t)\|^2$; les solutions non constantes sont des paramétrages uniformes de cercles. Dans les coordonnées (x, x') , ces mêmes courbes sont des ellipses.

La troisième représentation identifie U au nombre complexe

$$z = x + i \frac{x'}{\omega}.$$

Toute l'évolution se réduit alors à une multiplication :

$$z(t) = z(0)e^{-i\omega t}.$$

La restriction exacte aux instants nh devient la rotation discrète

$$Z_{n+1}^{\text{ex}} = e^{-ia} Z_n^{\text{ex}}.$$

Enfin, la quatrième représentation remplace cette restriction exacte par des systèmes récurrents. Le premier fait croître la norme par le facteur $1 + a^2$ à chaque étape. Le second conserve la forme quadratique

$$Q_a(X, Y) = X^2 - aXY + Y^2$$

et possède des itérés tous bornés exactement lorsque $0 < a < 2$. Dans ce domaine, il remplace l'angle exact a par

$$\theta = 2 \arcsin(a/2),$$

ce qui préserve qualitativement une rotation bornée mais déforme sa phase.

Les quatre descriptions ne sont donc pas quatre problèmes différents : elles montrent comment un changement de représentation peut transformer une même relation en formule explicite, conservation géométrique, multiplication complexe ou récurrence.

SOURCES

Hairer, Lubich et Wanner — Geometric Numerical Integration. [Lien direct](#)