



DM n°01 — L'oscillateur vu de quatre façons

Équations différentielles · Nombres complexes · Matrices et systèmes linéaires · Suites récurrentes · Analyse asymptotique

| On étudie l'équation différentielle

$$x'' + \omega^2 x = 0,$$

où $\omega > 0$. L'objectif est de comparer quatre descriptions mathématiques de ses solutions : expression explicite, invariant quadratique, coordonnée complexe puis systèmes récurrents. Chaque changement de représentation fera apparaître une structure différente du même problème.

On considère donc $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

avec

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

I Résoudre et paramétrer les solutions

- 1 Résoudre le problème de Cauchy. Distinguer soigneusement la solution nulle des solutions non constantes. Dans le cas non constant, déterminer un réel $A > 0$ et une phase φ , définie modulo 2π , tels que

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Exprimer A et caractériser φ à partir de x_0 et v_0 . En déduire l'image de x , la valeur maximale de $|x'|$ et la plus petite période strictement positive de x .

L'expression explicite détermine chaque valeur de la solution. Cherchons maintenant des relations algébriques indépendantes de t .

II Invariant quadratique et courbe de niveau

- 2 Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on considère

$$I_{\alpha, \beta}(t) = \alpha x'(t)^2 + \beta x(t)^2.$$

Déterminer tous les couples (α, β) pour lesquels $I_{\alpha, \beta}$ est constante pour **toute** solution de l'équation différentielle. Pour $\alpha = 1$, noter H l'invariant ainsi obtenu et exprimer sa valeur en fonction de x_0 et v_0 .

- 3 On pose désormais

$$y(t) = \frac{x'(t)}{\omega}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Sans reprendre l'expression explicite de x obtenue dans la partie I, déterminer, pour une solution non constante :

- l'image de l'application U ;
- l'orientation du paramétrage de cette courbe ;
- la valeur de $\|U'(t)\|$.

Retrouver la plus petite période strictement positive de U . Décrire aussi son image dans les coordonnées (x, x') et expliquer le rôle du changement de variable $y = x'/\omega$.

L'invariant décrit une courbe et le système différentiel son paramétrage. On cherche maintenant une coordonnée qui rassemble ces deux informations.

III Coordonnée complexe et rotation

- 4 Pour $c \in \mathbb{R}^*$, on définit

$$z_c(t) = x(t) + icx'(t).$$

Déterminer tous les couples $(c, \lambda) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{C}$ tels que, pour toute solution x ,

$$z'_c(t) = \lambda z_c(t).$$

Dans la suite, on retient le choix $c = 1/\omega$ et l'on note simplement $z = z_{1/\omega}$.

- 5 Établir une formule explicite donnant $z(t)$ en fonction de $z(0)$. Montrer comment cette formule permet de retrouver les paramètres A et φ , l'invariant H , l'orientation du paramétrage et la période.
- 6 Pour $h > 0$, on considère les valeurs de la solution aux instants nh . On pose

$$a = \omega h, \quad Z_n^{\text{ex}} = z(nh), \quad X_n^{\text{ex}} = x(nh), \quad Y_n^{\text{ex}} = \frac{x'(nh)}{\omega}.$$

- (a) Déterminer la transformation qui fait passer de Z_n^{ex} à Z_{n+1}^{ex} , puis sa matrice réelle dans les coordonnées $(X^{\text{ex}}, Y^{\text{ex}})$.
- (b) Établir une récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par (X_n^{ex}) , valable pour toute valeur de a .
- (c) Lorsque $Z_0^{\text{ex}} \neq 0$, caractériser les pas h pour lesquels la suite (Z_n^{ex}) est périodique. Si

$$\frac{a}{2\pi} = \frac{p}{q}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p/q irréductible, déterminer sa plus petite période en nombre de pas.

La suite précédente est obtenue par restriction d'une solution exacte. Nous comparons maintenant cette récurrence à deux systèmes discrets définis directement.

IV Systèmes discrets : invariants et stabilité

Dans toute cette partie, $a = \omega h > 0$.

- 7 On considère le système récurrent

$$\begin{cases} X_{n+1}^{\text{E}} = X_n^{\text{E}} + aY_n^{\text{E}}, \\ Y_{n+1}^{\text{E}} = Y_n^{\text{E}} - aX_n^{\text{E}}. \end{cases}$$

Déterminer R_n^2 en fonction de n , où

$$R_n^2 = (X_n^E)^2 + (Y_n^E)^2.$$

En déduire si les suites (X_n^E, Y_n^E) associées à des données initiales non nulles sont bornées. Comparer avec l'invariant de la partie II.

8 On considère maintenant le système

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n - aX_n, \\ X_{n+1} = X_n + aY_{n+1}. \end{cases} \quad (S)$$

Déterminer sa matrice S_a et son déterminant. Établir ensuite une récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite (X_n) .

9 Déterminer tous les triplets $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\alpha X_n^2 + \beta X_n Y_n + \gamma Y_n^2$$

soit constant pour toute suite vérifiant (S) .

Choisir une normalisation simple et noter Q_a la forme quadratique ainsi obtenue. Caractériser les valeurs de $a > 0$ pour lesquelles la conservation de Q_a contrôle la norme euclidienne de tous les itérés. Décrire alors les courbes de niveau positives de Q_a .

10 Caractériser **exactement** les valeurs de $a > 0$ pour lesquelles toutes les suites (X_n, Y_n) vérifiant (S) sont bornées. Les valeurs frontières doivent être traitées séparément.

Comparer cette conclusion avec celle de la question 9. La condition $\det S_a = 1$ suffit-elle à garantir cette propriété ?

11 On suppose désormais que $0 < a < 2$.

Déterminer la forme générale des suites réelles (X_n) vérifiant la récurrence de la question 8. Faire apparaître un angle $\theta \in (0, \pi)$, l'exprimer en fonction de a et comparer θ à a .

On pose

$$\omega_h = \frac{\theta}{h}.$$

Comparer ω_h et ω , puis montrer que, lorsque a est proche de 0,

$$\frac{\omega_h}{\omega} = 1 + \frac{a^2}{24} + o(a^2).$$

Montrer également que, lorsque a est proche de 0,

$$2 \cos a = 2 - a^2 + \frac{a^4}{12} + o(a^4).$$

Comparer alors la récurrence exacte de la question 6 avec celle de (S) et relier les deux écarts asymptotiques obtenus.

V Synthèse des représentations

12 Sans nouveau calcul, relier explicitement les quatre descriptions rencontrées. Pour chacune, préciser l'objet mathématique utilisé, ce qu'elle rend particulièrement simple ou visible et, pour les systèmes discrets de la partie IV, ce qui constitue une approximation de la solution initiale.