

## CORRIGÉ

PCSI · CORRIGÉ

CHAPITRES

## Un cercle devient une droite

Nombres complexes ·  
Trigonométrie · Géométrie plane ·  
Calcul algébrique

L'inversion utilisée ici est l'inversion géométrique de centre  $O$  et de puissance 1 : elle conserve la demi-droite issue de  $O$  et remplace la distance à  $O$  par son inverse.

## I Changer l'échelle sans changer la direction

## 1

Comme

$$z^* = \frac{z}{|z|^2},$$

le quotient  $z^*/z = 1/|z|^2$  est un réel strictement positif. Les points  $M$  et  $M^*$  appartiennent donc à la même demi-droite issue de  $O$ . De plus

$$|z^*| = \frac{1}{|z|},$$

d'où  $OM \cdot OM^* = 1$ .

En appliquant deux fois la relation précédente, la direction est conservée et la distance à  $O$  redevient  $OM$  :  $(M^*)^* = M$ .

Enfin  $M$  est fixe si et seulement si  $OM = 1$ . Les points fixes sont donc exactement les points du cercle unité.

## 2

On calcule

$$z^* - w^* = \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{w} - \bar{z}}{\bar{z}\bar{w}}.$$

En prenant les modules,

$$|z^* - w^*| = \frac{|w - z|}{|z| |w|}.$$

Ainsi

$$M^*N^* = \frac{MN}{OM \cdot ON}.$$

## 3

Le cercle  $\mathcal{C}$  est défini par  $|z - c| = |c|$ . En élevant au carré,

$$(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = c\bar{c},$$

soit

$$|z|^2 - z\bar{c} - \bar{z}c = 0.$$

Ainsi

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{c}z) = 0.$$

Si  $z \neq 0$ , on divise par  $|z|^2$  et on utilise  $z^* = z/|z|^2$  :

$$\operatorname{Re}(\bar{c}z^*) = \frac{1}{2}.$$

L'image de  $\mathcal{C} \setminus \{O\}$  est donc contenue dans  $\mathcal{D}_c$ .

Réciproquement, si  $u \in \mathcal{D}_c$ , alors  $u \neq 0$  car  $\operatorname{Re}(\bar{c}u) = 1/2$ . Posons  $z = u^*$ . L'involutivité montre que  $u = z^*$ , et le calcul précédent lu à l'envers donne  $|z - c| = |c|$ . Ainsi tout point de  $\mathcal{D}_c$  est atteint.

4 

---

Pour  $t \in (-\pi, \pi)$ ,

$$z(t) - r = re^{it},$$

donc  $|z(t) - r| = r$ . Réciproquement, tout point du cercle différent de  $O$  s'écrit sous cette forme avec un unique  $t \in (-\pi, \pi)$ .

On utilise

$$1 + e^{it} = 2 \cos \frac{t}{2} e^{it/2}.$$

Comme  $t/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$ , on a  $\cos(t/2) > 0$ . Alors

$$|z(t)|^2 = 4r^2 \cos^2 \frac{t}{2},$$

puis

$$z(t)^* = \frac{2r \cos(t/2) e^{it/2}}{4r^2 \cos^2(t/2)} = \frac{1}{2r} \frac{e^{it/2}}{\cos(t/2)} = \frac{1}{2r} \left( 1 + i \tan \frac{t}{2} \right).$$

Tous les points inverses ont donc la même partie réelle  $1/(2r)$ , et leur partie imaginaire est proportionnelle à  $\tan(t/2)$ . La fonction tangente étant strictement croissante sur  $(-\pi/2, \pi/2)$ , l'ordre des paramètres est exactement l'ordre des points sur cette droite.

## II Ptolémée : une addition cachée

5 

---

Le cercle passant par  $A = O$  est transformé en une droite d'après la question 3. Ainsi  $B^*, C^*, D^*$  sont alignés. Comme  $t_B < t_C < t_D$ , la question 4 montre que  $C^*$  est entre  $B^*$  et  $D^*$ . Par conséquent

$$B^*D^* = B^*C^* + C^*D^*.$$

6

La formule de la question 2, appliquée avec centre d'inversion  $A$ , donne

$$B^*D^* = \frac{BD}{AB \cdot AD}, \quad B^*C^* = \frac{BC}{AB \cdot AC}, \quad C^*D^* = \frac{CD}{AC \cdot AD}.$$

On remplace dans l'égalité de la question 5 puis on multiplie par  $AB \cdot AC \cdot AD$  :

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

**IDÉE** Le théorème paraît quadratique parce qu'il contient des produits de distances. Après inversion, ces produits sont exactement ceux qui compensent la déformation des longueurs, et il ne reste qu'une addition sur une droite.

### III Ce que l'identité sait faire

7

Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu et ont même longueur : leur point d'intersection est donc équidistant des quatre sommets. Le rectangle est ainsi inscriptible dans un cercle. Ses diagonales ont longueur  $d$ . Ptolémée donne

$$d \cdot d = a \cdot a + b \cdot b,$$

donc

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

8

Prenons quatre sommets consécutifs  $A, B, C, D$  du pentagone régulier. On a

$$AB = BC = CD = s, \quad AC = BD = AD = d.$$

Ptolémée donne

$$d^2 = s^2 + sd.$$

En posant  $x = d/s > 0$ ,

$$x^2 = x + 1.$$

La solution positive est

$$\frac{d}{s} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Le nombre d'or apparaît donc comme le rapport diagonale/côté du pentagone régulier.

9

Si  $u = e^{i\theta_1}$  et  $v = e^{i\theta_2}$ , alors

$$|u - v| = \left| e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2} \left( e^{i(\theta_1 - \theta_2)/2} - e^{-i(\theta_1 - \theta_2)/2} \right) \right| = 2 \left| \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right|.$$

Notons  $A, B, C, D$  les quatre points indiqués. Les longueurs utiles sont

$$\begin{aligned} AC &= 2 \sin(\alpha + \beta), & BD &= 2, \\ AB &= 2 \sin \alpha, & CD &= 2 \cos \beta, \\ AD &= 2 \cos \alpha, & BC &= 2 \sin \beta. \end{aligned}$$

Ptolémée donne alors

$$4 \sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cos \beta + 4 \cos \alpha \sin \beta,$$

d'où

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

## IV Le cercle comme cas d'égalité

10

Développons le membre de droite :

$$(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) = ac - ad - bc + bd + ab - ac - bd + cd,$$

soit

$$ab - ad - bc + cd = (a - c)(b - d).$$

L'identité est démontrée. En prenant les modules puis en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|a - c| |b - d| \leq |a - b| |c - d| + |a - d| |b - c|.$$

Ainsi

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Pour quatre points cocycliques pris dans l'ordre, le théorème de Ptolémée donne précisément l'égalité.

11

Dans l'égalité triangulaire  $|u + v| = |u| + |v|$  avec  $u, v \neq 0$ , les nombres  $u$  et  $v$  ont le même argument, c'est-à-dire  $u/v \in \mathbb{R}_{>0}$ . Ici

$$u = (a - b)(c - d), \quad v = (a - d)(b - c).$$

Donc

$$\frac{(a - b)(c - d)}{(a - d)(b - c)} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

À un signe près,

$$\frac{(b - a)(d - c)}{(d - a)(b - c)} = - \frac{(a - b)(c - d)}{(a - d)(b - c)},$$

ce quotient est donc réel.

Il reste à obtenir la cocyclicité sans invoquer de critère extérieur. Les transformations  $z \mapsto z - a$ ,  $z \mapsto e^{i\theta}z$  et  $z \mapsto kz$  avec  $k > 0$  sont respectivement une translation, une rotation et une homothétie ; elles transforment les cercles en cercles. En les composant, on peut supposer

$$a = 0, \quad d = 1.$$

Écrivons  $b = x + iy$  et  $c = s + it$ . Comme  $A, B, D$  ne sont pas alignés,  $y \neq 0$ .

Tout cercle passant par 0 a une équation

$$X^2 + Y^2 + \alpha X + \beta Y = 0.$$

Le passage par 1 impose  $\alpha = -1$ . Le passage par  $b = (x, y)$  impose alors

$$x^2 + y^2 - x + \beta y = 0,$$

d'où

$$\beta = \lambda = \frac{x - x^2 - y^2}{y}.$$

Le cercle  $\Gamma$  passant par 0, 1 et  $b$  a donc pour équation

$$X^2 + Y^2 - X + \frac{x - x^2 - y^2}{y}Y = 0.$$

Dans la normalisation  $a = 0, d = 1$ , la condition obtenue en (b) est

$$\frac{b(1 - c)}{b - c} \in \mathbb{R}.$$

Elle équivaut à l'égalité de ce nombre avec son conjugué. Après multiplication par les dénominateurs non nuls puis simplification, on obtient

$$y(s^2 + t^2 - s) + t(x - x^2 - y^2) = 0.$$

Comme  $y \neq 0$ ,

$$s^2 + t^2 - s + \frac{x - x^2 - y^2}{y}t = 0.$$

Ainsi  $c = (s, t)$  appartient au même cercle  $\Gamma$  que 0, 1,  $b$ . En revenant par la similitude inverse, on conclut que  $A, B, C, D$  sont cocycliques.

Ainsi, hors cas dégénérés, l'égalité dans cette forme de l'inégalité de Ptolémée caractérise les configurations cocycliques avec l'ordre correspondant des quatre points.

Le problème a fait apparaître deux visages d'une même relation : géométriquement, l'inversion transforme un cercle en droite ; algébriquement, l'identité complexe de la dernière partie donne l'inégalité générale. Pour l'ordre de points considéré, la concyclicité est précisément la situation où l'inégalité triangulaire cachée devient une égalité.

## SOURCES

H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America : [Lien direct](#).

Evan Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* : [Lien direct](#).

M. Chamberland et D. Zeilberger, *A Short Proof of a Ptolemy-Like Relation for an Even Number of Points on a Circle* : [Lien direct](#).