

Un cercle devient une droite

Nombres complexes ·
Trigonométrie · Géométrie plane ·
Calcul algébrique

Une identité métrique sur quatre points d'un cercle peut sembler difficile à deviner. L'idée de ce problème est de modifier complètement la figure : une transformation simple fera d'un cercle une droite, et une relation non linéaire deviendra alors une addition de longueurs.

Le plan est identifié à $\mathbb{C}$ dans un repère orthonormé direct d'origine O . Si $M \neq O$ a pour affixe z , on définit son inverse M^* par

$$z^* = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Toutes les notions utilisées ci-dessous sont soit au programme, soit définies dans l'énoncé.

I Changer l'échelle sans changer la direction

1 Soit $M \neq O$ d'affixe z .

(a) Montrer que M et M^* appartiennent à une même demi-droite issue de O et que

$$OM \cdot OM^* = 1.$$

(b) Montrer que la transformation $M \mapsto M^*$ est involutive : $(M^*)^* = M$.

(c) Déterminer ses points fixes.

2 Soient $M, N \neq O$, d'affixes respectives z et w . Établir la formule

$$M^*N^* = \frac{MN}{OM \cdot ON}.$$

On pourra commencer par calculer $z^* - w^*$.

3 Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par O , de centre C d'affixe $c \neq 0$.

(a) Montrer que $M(z) \in \mathcal{C}$ si et seulement si

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{c}z) = 0.$$

(b) En déduire que, lorsque $M \neq O$ décrit $\mathcal{C}$, le point M^* décrit la droite

$$\mathcal{D}_c : \operatorname{Re}(\bar{c}u) = \frac{1}{2}.$$

(c) Montrer réciproquement que tout point de $\mathcal{D}_c$ est l'inverse d'un point de $\mathcal{C} \setminus \{O\}$.

4 On suppose maintenant, après une rotation éventuelle du repère, que $c = r > 0$. Le cercle $\mathcal{C}$ a alors pour équation $|z - r| = r$. Pour $t \in (-\pi, \pi)$, on pose

$$z(t) = r(1 + e^{it}).$$

- (a) Vérifier que $z(t)$ décrit $\mathcal{C} \setminus \{O\}$.
- (b) Montrer que

$$z(t)^* = \frac{1}{2r} \left(1 + i \tan \frac{t}{2} \right).$$

- (c) Expliquer pourquoi l'ordre des paramètres t devient l'ordre des points inverses sur la droite $\mathcal{D}_r$.

II Ptolémée : une addition cachée

Soient A, B, C, D quatre points distincts d'un même cercle, placés dans cet ordre sur le cercle. On choisit désormais A pour origine et on applique l'inversion précédente aux trois autres sommets. Après une rotation, et au besoin une symétrie par rapport à l'axe réel, on peut paramétrer le cercle de sorte que

$$-\pi < t_B < t_C < t_D < \pi.$$

- 5 Montrer que B^*, C^*, D^* sont alignés et que C^* appartient au segment $[B^*, D^*]$. En déduire

$$B^*D^* = B^*C^* + C^*D^*.$$

- 6 Exprimer les trois longueurs de la question précédente à l'aide des distances entre A, B, C, D , puis démontrer le théorème de Ptolémée :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

III Ce que l'identité sait faire

- 7 Un rectangle de côtés a et b a pour diagonale d . Montrer brièvement qu'il est inscriptible dans un cercle, puis retrouver le théorème de Pythagore en appliquant le théorème de Ptolémée à ses quatre sommets.
- 8 Dans un pentagone régulier inscrit dans un cercle, on note s la longueur d'un côté et d celle d'une diagonale.
- (a) Appliquer Ptolémée à quatre sommets consécutifs et montrer que

$$d^2 = s^2 + sd.$$

- (b) En déduire la valeur exacte du rapport d/s .
- 9 Soient $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$. Sur le cercle unité, on considère quatre points d'arguments respectifs

$$0, \quad 2\alpha, \quad 2(\alpha + \beta), \quad \pi + 2\alpha.$$

- (a) Rappeler et démontrer, à l'aide des nombres complexes, que la corde joignant deux points du cercle unité dont les arguments diffèrent de θ a pour longueur

$$2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|.$$

- (b) Appliquer Ptolémée à ces quatre points et retrouver la formule

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

IV Le cercle comme cas d'égalité

10 Soient maintenant A, B, C, D quatre points quelconques du plan, d'affixes a, b, c, d .

(a) Vérifier l'identité algébrique

$$(a - c)(b - d) = (a - b)(c - d) + (a - d)(b - c).$$

(b) En prenant les modules, démontrer l'inégalité de Ptolémée

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

(c) Expliquer pourquoi le théorème démontré dans la partie précédente affirme que tout quadrilatère cyclique est un cas d'égalité.

11 On suppose dans cette dernière question que les quatre points sont distincts, qu'aucun triplet n'est aligné et que l'égalité de Ptolémée est vérifiée.

(a) Que peut-on dire des deux nombres complexes

$$(a - b)(c - d) \quad \text{et} \quad (a - d)(b - c)$$

si l'inégalité triangulaire utilisée à la question précédente est une égalité ?

(b) En déduire que

$$\frac{(b - a)(d - c)}{(d - a)(b - c)} \in \mathbb{R}.$$

(c) Afin de ne citer aucun critère de cocyclicité extérieur au problème, on termine algébriquement. Une translation, une rotation et une homothétie préservent les cercles ; on peut donc supposer $a = 0, d = 1$ et écrire $b = x + iy, c = s + it$, avec $y \neq 0$. Montrer que le cercle passant par 0, 1 et b a pour équation

$$X^2 + Y^2 - X + \lambda Y = 0, \quad \lambda = \frac{x - x^2 - y^2}{y},$$

puis que la réalité du quotient obtenu en (b) équivaut à dire que (s, t) satisfait cette même équation. Conclusion.

L'inversion ne conserve pas les distances, mais elle transforme de façon très contrôlée les rapports de longueurs et échange certaines droites et certains cercles. Ici, elle convertit le théorème de Ptolémée en la relation élémentaire « une longueur est la somme de deux autres » sur une droite. C'est un exemple typique d'une idée féconde en géométrie : changer l'objet plutôt que forcer le calcul.

SOURCES

H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America : [Lien direct](#).

Evan Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* : [Lien direct](#).

M. Chamberland et D. Zeilberger, *A Short Proof of a Ptolemy-Like Relation for an Even Number of Points on a Circle* : [Lien direct](#).