

CORRIGÉ

Seconde générale · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°02 — La véritable identité des nombres

Ensembles de nombres ·
Appartenance et inclusion ·
Écriture décimale

I Éléments ou ensembles ?

1

Les affirmations (a), (c), (f) et (g) sont vraies. Les autres se corrigent ainsi :

$$(b) 5 \in \mathbb{N}, \quad (d) \{5\} \subseteq \mathbb{N}, \quad (e) \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \quad (h) 2,5 \notin \mathbb{Z}.$$

Le symbole $\in$ relie un *élément* à un ensemble, tandis que $\subseteq$ relie deux *ensembles*. Enfin, -3 est bien décimal puisque

$$-3 = \frac{-30}{10}.$$

2

La chaîne d'inclusions est

$$\boxed{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}}.$$

À ce stade, le symbole $\subseteq$ ne dit pas encore si deux ensembles consécutifs pourraient être égaux. Les questions suivantes permettent précisément de montrer qu'ils ne le sont pas.

3

(a) On peut écrire

$$7 = \frac{70}{10} \quad \text{et} \quad -4 = \frac{-40}{10}.$$

Ces deux écritures sont de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ainsi 7 et -4 sont décimaux.

(b) Pour un entier quelconque m , on peut faire exactement la même chose :

$$m = \frac{10m}{10}.$$

Donc tout entier est un nombre décimal, ce qui donne

$$\boxed{\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D}}.$$

(c) On a

$$2,35 = \frac{235}{100}.$$

Le numérateur 235 et le dénominateur 100 sont des entiers et $100 \neq 0$. Cette écriture est donc aussi de la forme $\frac{a}{b}$ utilisée dans la définition d'un rationnel : $2,35 \in \mathbb{Q}$.

(d) Si $x \in \mathbb{D}$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$x = \frac{a}{10^n}.$$

Or 10^n est un entier strictement positif, donc non nul. Cette écriture est donc un quotient de deux entiers avec un dénominateur non nul : $x \in \mathbb{Q}$. Ainsi

$$\boxed{\mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q}}.$$

II Une écriture peut en cacher une autre

4

On commence toujours par déterminer la valeur du nombre, puis on le classe.

Nombre	Valeur	Ensembles auxquels il appartient	Plus petit ensemble
A	4	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$\mathbb{N}$
B	-7	$\mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
C	0,35	$\mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$\mathbb{D}$
D	0,625	$\mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$\mathbb{D}$
E	2	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$\mathbb{N}$
F	-3	$\mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$

En effet,

$$-\sqrt{49} = -7, \quad \frac{7}{20} = 0,35, \quad \frac{5}{8} = 0,625,$$

$$\frac{\sqrt{81} - 5}{2} = \frac{9 - 5}{2} = 2, \quad -\frac{18}{6} = -3.$$

5

L'écriture 4,00 contient une virgule, mais elle représente exactement le nombre 4. Or

$$4 \in \mathbb{N}.$$

Comme $\mathbb{N}$ est inclus dans tous les ensembles suivants de la chaîne, le plus petit ensemble contenant 4,00 est $\mathbb{N}$, et non $\mathbb{D}$.

III Les frontières entre les ensembles

6

(a) Par exemple,

$$-1 \in \mathbb{Z} \quad \text{mais} \quad -1 \notin \mathbb{N}.$$

On savait déjà que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Comme il existe maintenant un élément de $\mathbb{Z}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{N}$, les deux ensembles ne sont pas égaux. Donc

$$\boxed{\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}}.$$

(b) De même,

$$\frac{1}{2} = 0,5 \in \mathbb{D} \quad \text{mais} \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D}}.$$

7 _____

On sait déjà que $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$. Pour décider s'il est aussi décimal, on imagine provisoirement un monde où ce serait le cas.

(a) Dans ce monde, la définition d'un nombre décimal donne des entiers a et n tels que

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}.$$

En multipliant les deux membres par 3×10^n , on obtient

$$\boxed{10^n = 3a}.$$

(b) L'égalité $10^n = 3a$ signifie que 10^n est un multiple de 3. Dans le monde provisoire, on est donc conduit à conclure que 10^n est divisible par 3.

(c) 10^n est un 1 suivi de n zéros. La somme de ses chiffres vaut donc 1. D'après le critère de divisibilité par 3, 10^n n'est pas divisible par 3. On obtient donc deux conclusions incompatibles : 10^n serait à la fois divisible et non divisible par 3.

(d) Cette contradiction ne vient pas d'une erreur de calcul : elle montre que le monde provisoire construit au départ est impossible. L'hypothèse $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ est donc fausse. Ainsi

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}.$$

Comme $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, il existe un rationnel qui n'est pas décimal. Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q}}.$$

8 _____

Le nombre $\sqrt{2}$ est un réel et l'on admet qu'il n'est pas rationnel. Il existe donc un élément de $\mathbb{R}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, on en déduit

$$\boxed{\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}}.$$

On peut maintenant réunir les quatre frontières :

$$\boxed{\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}}.$$

Des témoins possibles sont respectivement

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \sqrt{2}.$$

À chaque fois, le nombre appartient à l'ensemble situé à droite de la frontière, mais pas à celui situé à gauche.

IV Une écriture infinie

9

(a) On a

$$d_1 = \frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{10}, \quad d_2 = \frac{99}{100} = 1 - \frac{1}{100}, \\ d_3 = \frac{999}{1000} = 1 - \frac{1}{1000}.$$

(b) Ces trois exemples conduisent naturellement à proposer

$$d_n = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

(c) Le nombre d_n s'écrit

$$d_n = \frac{\overbrace{99 \dots 9}^{n \text{ chiffres } 9}}{10^n}.$$

L'entier du numérateur vaut $10^n - 1$, donc

$$d_n = \frac{10^n - 1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

La formule proposée est bien démontrée.

10

(a) À partir de la formule précédente,

$$1 - d_1 = 10^{-1} = 0,1, \quad 1 - d_2 = 10^{-2} = 0,01, \\ 1 - d_3 = 10^{-3} = 0,001, \quad 1 - d_6 = 10^{-6} = 0,000001.$$

Ces nombres sont exactement les écarts entre les troncatures d_n et 1.

(b) Pour avoir un écart strictement inférieur à 10^{-3} , il faut dépasser le cas $n = 3$, pour lequel l'écart vaut exactement 10^{-3} . Le plus petit choix est donc $n = 4$. De même, pour un écart strictement inférieur à 10^{-6} , le plus petit choix est $n = 7$.

(c) Pour $p \geq 1$, on a

$$1 - d_n = 10^{-n}.$$

Si $n > p$, alors $10^{-n} < 10^{-p}$. Cette condition suffit donc à obtenir l'écart demandé.

(d) Comme $10^{-n} > 0$, on obtient, dès que $n > p$,

$$0 < 1 - d_n < 10^{-p}.$$

Ainsi, quelle que soit la précision décimale 10^{-p} choisie à l'avance, il suffit d'écrire suffisamment de chiffres 9 pour que l'écart entre d_n et 1 devienne encore plus petit.

11

Pour tout $p \geq 1$, dès que $n > p$, la question 10(d) donne $0 < 1 - d_n < 10^{-p}$. Toutes les troncatures suffisamment longues sont donc plus proches de 1 que toute précision décimale fixée à l'avance. Le principe admis dans l'énoncé donne alors

$$0,999 \dots = 1.$$

Il ne s'agit pas d'une approximation : les deux écritures désignent exactement le même nombre. Pour chaque nombre fini de chiffres 9, on a bien $d_n < 1$; l'égalité concerne l'écriture prolongée indéfiniment, ce que la notion de limite formalise.

12

Puisque $0,999 \dots = 1$, on a

$$0,999 \dots \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}.$$

Son plus petit ensemble est donc

$$\mathbb{N}.$$

L'écriture infinie pourrait faire croire qu'il s'agit d'un nombre *juste inférieur* à 1, mais le classement porte sur la valeur du nombre, pas sur l'apparence de son écriture.