

DM n°02 — La véritable identité des nombres

Ensembles de nombres ·
Appartenance et inclusion ·
Écriture décimale

Un même nombre peut avoir plusieurs écritures et appartenir à plusieurs ensembles. Pour le classer correctement, il faut donc distinguer ce qu'il vaut de la forme sous laquelle il se présente. Les dernières questions conduisent à une écriture décimale infinie dont l'apparence est particulièrement trompeuse.

On utilise les notations usuelles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

I Éléments ou ensembles ?

- 1 Parmi les affirmations suivantes, recopier celles qui sont vraies et corriger celles qui sont fausses en remplaçant uniquement le symbole lorsque c'est possible.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} 5 \in \mathbb{N}, & \text{(b)} 5 \subseteq \mathbb{N}, & \text{(c)} \{5\} \subseteq \mathbb{N}, & \text{(d)} \{5\} \in \mathbb{N}, \\ \text{(e)} \mathbb{N} \in \mathbb{Z}, & \text{(f)} \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, & \text{(g)} -3 \in \mathbb{D}, & \text{(h)} 2,5 \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Notation. $A \subseteq B$ signifie que tout élément de A appartient aussi à B . Le symbole $\subseteq$ autorise le cas où $A = B$: il dit seulement que A est inclus dans B , sans affirmer que les deux ensembles sont différents.

- 2 Ranger $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ par inclusion croissante. Écrire pour l'instant seulement des symboles $\subseteq$: on déterminera plus loin si ces inclusions sont strictes.

Un nombre est **décimal** s'il peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Un nombre est **rationnel** s'il peut s'écrire $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- 3 Les définitions précédentes permettent de justifier deux des inclusions de la question 2. Commençons par des exemples.

(a) Écrire 7 puis -4 sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pourquoi ces deux entiers sont-ils donc aussi des nombres décimaux ?

(b) Soit maintenant $m \in \mathbb{Z}$. Compléter l'écriture $m = \frac{\dots}{10^{\dots}}$ de façon à montrer que tout entier est décimal. En déduire une inclusion.

(c) Le nombre 2,35 peut s'écrire $\frac{235}{100}$. Expliquer pourquoi cette écriture montre aussi que 2,35 est rationnel.

(d) Plus généralement, si $x \in \mathbb{D}$, on peut écrire $x = \frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Expliquer pourquoi cette écriture est aussi une écriture de x comme quotient de deux entiers, puis en déduire une seconde inclusion.

II Une écriture peut en cacher une autre

- 4 Pour chacun des six nombres ci-dessous, procéder dans le même ordre.

$$\begin{array}{lll} A = 4,00, & B = -\sqrt{49}, & C = \frac{7}{20}, \\ D = \frac{5}{8}, & E = \frac{\sqrt{81} - 5}{2}, & F = -\frac{18}{6}. \end{array}$$

- (a) Calculer sa valeur exacte lorsque l'écriture peut être simplifiée.
 - (b) À partir de cette valeur, indiquer tous les ensembles parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ auxquels il appartient.
 - (c) Donner enfin le plus petit de ces ensembles qui le contient.
- 5 Le nombre 4,00 est écrit avec une virgule. Expliquer pourquoi son plus petit ensemble n'est pourtant pas $\mathbb{D}$.

III Les frontières entre les ensembles

Inclusion stricte. On écrit $A \subsetneq B$ lorsque $A \subseteq B$ mais que A et B ne sont pas égaux. Lorsque l'on sait déjà que $A \subseteq B$, il suffit donc, pour montrer que l'inclusion est stricte, de trouver au moins un élément de B qui n'appartient pas à A .

- 6 Utiliser cette définition pour montrer que les deux premières inclusions de la chaîne sont strictes.

- (a) Trouver un nombre appartenant à $\mathbb{Z}$ mais pas à $\mathbb{N}$. Que peut-on en déduire pour $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$?
- (b) Trouver un nombre appartenant à $\mathbb{D}$ mais pas à $\mathbb{Z}$. Que peut-on en déduire pour $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$?

- 7 On sait que $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$. Cherchons maintenant s'il peut aussi appartenir à $\mathbb{D}$.

Raisonnement par l'absurde. Nous allons imaginer provisoirement un autre monde dans lequel $\frac{1}{3}$ serait décimal. Il ne s'agit pas d'affirmer que c'est vrai : on suit simplement les conséquences de cette hypothèse. Si ce monde conduit à deux conclusions incompatibles, alors l'hypothèse de départ ne peut pas être vraie.

- (a) Dans ce monde provisoire, la définition d'un nombre décimal permet d'écrire $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Multiplier cette égalité de façon à faire disparaître les deux dénominateurs. Quelle égalité obtient-on ?
 - (b) Que dit cette égalité sur la divisibilité de 10^n par 3 ?
 - (c) 10^n s'écrit en base dix comme un 1 suivi de n zéros. À l'aide du critère de divisibilité par 3, déterminer si 10^n est divisible par 3. Comparer avec la réponse précédente.
 - (d) Les deux conclusions obtenues sont incompatibles. Que faut-il donc conclure sur l'hypothèse $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$? En déduire une inclusion stricte entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.
- 8 On admet ici que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Expliquer pourquoi cela prouve que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Écrire alors la chaîne complète des cinq ensembles avec des inclusions strictes et, pour chaque frontière, donner un nombre appartenant à l'ensemble de droite mais pas à celui de gauche.

IV Une écriture infinie

Pour tout entier $n \geq 1$, on note d_n le nombre décimal dont l'écriture comporte exactement n chiffres 9 après la virgule :

$$d_1 = 0,9, \quad d_2 = 0,99, \quad d_3 = 0,999, \quad \dots$$

- 9 Construisons d'abord la formule donnant d_n .

- (a) Écrire d_1 , d_2 et d_3 sous forme de fractions de dénominateurs respectifs 10, 100 et 1000, puis sous la forme 1 – une fraction.

- (b) À partir de ces trois exemples, proposer une formule donnant d_n en fonction de n .
- (c) L'entier formé de n chiffres 9 vaut $10^n - 1$. Utiliser cette remarque pour démontrer la formule proposée à la question précédente.

10 Observons maintenant l'écart entre d_n et 1.

- (a) Calculer $1 - d_1$, $1 - d_2$, $1 - d_3$ et $1 - d_6$. Que représentent ces nombres ?
- (b) Quel est le plus petit nombre de chiffres 9 nécessaire pour que l'écart avec 1 soit strictement inférieur à 10^{-3} ? Même question avec 10^{-6} .
- (c) Plus généralement, soit $p \geq 1$. À l'aide de la formule de la question 9, déterminer une condition simple sur n qui assure $1 - d_n < 10^{-p}$.
- (d) En déduire que, si $n > p$, alors $0 < 1 - d_n < 10^{-p}$. Interpréter cette inégalité lorsque le nombre de chiffres 9 augmente.

Point de rigueur. Une démonstration entièrement rigoureuse de ce passage à une écriture décimale infinie demande de définir précisément ce que signifie poursuivre indéfiniment l'écriture. Cela s'appuie sur la notion de limite, étudiée dans les classes suivantes du lycée, en particulier en Terminale. On admet ici le principe suivant : quelle que soit la précision décimale fixée à l'avance, si toutes les troncatures suffisamment longues sont plus proches d'un réel que cette précision, alors l'écriture infinie désigne ce réel.

11 Appliquer ce principe aux nombres d_n et déterminer la valeur exacte de

$$0,999 \dots$$

12 Indiquer tous les ensembles parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ auxquels appartient $0,999 \dots$, puis donner son plus petit ensemble. Expliquer en une phrase pourquoi cet exemple montre qu'on ne peut pas classer un nombre d'après son apparence seule.

La valeur d'un nombre détermine ses appartenances ; son écriture n'est qu'une manière de le représenter.