

CORRIGÉ

Terminale · spécialité maths · CORRIGÉ

CHAPITRES

Doses répétées

Suites · Fonction exponentielle ·
Dérivation · Probabilités
conditionnelles · Variables
aléatoires · Second degré ·
Algorithmique

I Accumulation : un modèle discret

1

Pour les calculs demandés, on utilise l'arrondi au dixième de

$$q = e^{-1/2} \simeq 0,6065,$$

c'est-à-dire

$$q = 0,6.$$

Après le premier apport, on a $u_0 = 40$. Cinq heures plus tard, il reste $0,6 \times 40$ unités, puis le deuxième apport ajoute 40 unités. Ainsi,

$$u_1 = 0,6 \times 40 + 40 = 64.$$

On recommence exactement le même cycle :

$$u_2 = 0,6 \times 64 + 40 = 78,4,$$

puis

$$u_3 = 0,6 \times 78,4 + 40 = 87,04.$$

Ces premières valeurs montrent déjà l'effet d'accumulation : la quantité diminue entre deux apports, mais une partie des apports précédents est encore présente lorsque le suivant arrive.

Jusqu'à la fin de cette partie, on conserve donc $q = 0,6$.

2

Juste après le $(n+1)$ -ième apport, la quantité vaut u_n . Après 5 heures de décroissance, elle a été multipliée par q et vaut donc qu_n . L'apport suivant ajoute alors 40 unités. Par conséquent,

$$u_{n+1} = qu_n + 40.$$

IDÉE La récurrence résume un cycle complet : 5 heures de décroissance, puis l'ajout du nouvel apport.

3

(a) L'équation $L = qL + 40$ donne

$$(1 - q)L = 40.$$

Dans cette partie, $q = 0,6$, donc

$$L = \frac{40}{1 - q} = 100.$$

(b) Posons $v_n = u_n - L$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - L = qu_n + 40 - L.$$

Or $L = qL + 40$, donc $40 - L = -qL$. Ainsi,

$$v_{n+1} = q(u_n - L) = qv_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison q . De plus,

$$v_0 = 40 - L.$$

Comme $40 = (1 - q)L$, on obtient

$$v_0 = -qL.$$

Donc

$$v_n = -Lq^{n+1},$$

et finalement

$$u_n = L(1 - q^{n+1}).$$

(c) En utilisant $L = 40/(1 - q)$,

$$u_n = 40 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Or

$$(1 - q)(1 + q + \cdots + q^n) = 1 - q^{n+1},$$

d'où

$$u_n = 40(1 + q + \cdots + q^n).$$

Pour $n = 3$,

$$u_3 = 40 + 40q + 40q^2 + 40q^3.$$

- le terme 40 est le quatrième apport, qui vient d'être effectué ;
- le terme $40q$ est ce qu'il reste du troisième apport après un intervalle de 5 heures ;
- le terme $40q^2$ est ce qu'il reste du deuxième apport après deux intervalles ;
- le terme $40q^3$ est ce qu'il reste du premier apport après trois intervalles.

En général, immédiatement après le $(n + 1)$ -ième apport, chaque apport antérieur contribue encore à la quantité totale. La puissance de q compte le nombre d'intervalles de 5 heures écoulés depuis cet apport.

IDÉE Les deux écritures de u_n apportent deux lectures complémentaires. La formule $L(1 - q^{n+1})$ mesure l'écart à l'équilibre ; la somme $40(1 + q + \dots + q^n)$ montre comment les apports successifs s'accumulent.

4 _____

Comme $0 < q < 1$,

$$0 < q^{n+1} < 1.$$

La formule précédente donne

$$0 < u_n = L(1 - q^{n+1}) < L.$$

Ainsi,

$$u_n < L.$$

D'autre part,

$$u_{n+1} - u_n = (q - 1)u_n + 40.$$

Comme $(1 - q)L = 40$,

$$u_{n+1} - u_n = (1 - q)(L - u_n).$$

Les deux facteurs sont strictement positifs, donc

$$u_{n+1} > u_n.$$

La suite (u_n) est croissante.

Enfin, puisque $q^{n+1} \rightarrow 0$,

$$u_n = L(1 - q^{n+1}) \rightarrow L.$$

Dans le modèle arrondi de cette partie,

$$L = 100.$$

La quantité immédiatement après les apports se rapproche donc de 100 unités.

5 _____

(a) Pendant les 5 heures qui suivent l'apport, la quantité est multipliée par q . Ainsi,

$$w_n = qu_n.$$

La relation $u_{n+1} = qu_n + 40$ donne aussi

$$w_n = u_{n+1} - 40.$$

(b) Comme $u_n \rightarrow L$,

$$w_n = qu_n \rightarrow qL.$$

Or $L = qL + 40$, donc $qL = L - 40$. Dans le modèle arrondi,

$$L = 100 \quad \text{et} \quad qL = 60.$$

La quantité se stabilise donc autour d'un cycle : environ 100 unités juste après un apport, puis 60 unités juste avant le suivant.

6 _____

Le programme reprend $q = 0,6$ et $L = 100$.

(a) Comme $u < L$, la distance entre u et L vaut $L - u$. Être à moins de ε de L signifie donc

$$L - u < \varepsilon.$$

La boucle doit continuer tant que cette condition n'est pas encore satisfaite, c'est-à-dire tant que $L - u \geq \varepsilon$. La mise à jour de u utilise la relation de récurrence et le rang augmente de 1 à chaque tour.

Le programme complété est :

```
q = 0.6
L = 40/(1-q)
def rang(eps):
    n = 0
    u = 40
    while L - u >= eps:
        u = q*u + 40
        n = n + 1
    return n
```

Les trois éléments qui étaient à compléter dans l'énoncé apparaissent ici en rose et en gras.

(b) Dans ce modèle,

$$u_n = 100(1 - 0,6^{n+1}),$$

donc

$$100 - u_n = 100 \times 0,6^{n+1}.$$

Or

$$100 \times 0,6^9 \simeq 1,008 > 1$$

et

$$100 \times 0,6^{10} \simeq 0,605 < 1.$$

Ainsi u_8 n'est pas encore à moins d'une unité de 100, tandis que u_9 l'est. Le programme renvoie donc

$$\text{rang}(1) = 9.$$

II Entre deux apports : le modèle continu

On quitte maintenant l'approximation numérique de la partie I et l'on revient au modèle initial exact. Dans cette partie, les notations u_n et L désignent les valeurs correspondant à

$$q = e^{-1/2} \quad \text{et} \quad L = \frac{40}{1-q}.$$

7

On a

$$C_n(t) = u_n e^{-t/10}.$$

Comme $u_n > 0$,

$$C'_n(t) = -\frac{u_n}{10} e^{-t/10} < 0.$$

La fonction C_n est donc strictement décroissante sur $[0; 5]$. On résume cette étude dans le tableau de variations suivant :

t	0	5
$C'_n(t)$	—	
$C_n(t)$	u_n	qu_n

On lit directement dans le tableau que le maximum est atteint en $t = 0$:

$$C_n(0) = u_n,$$

et que le minimum est atteint en $t = 5$:

$$C_n(5) = u_n e^{-1/2} = qu_n = w_n.$$

8

Par définition de q ,

$$C_n(5) = u_n e^{-5/10} = u_n e^{-1/2} = qu_n.$$

Puis la relation de récurrence donne

$$u_{n+1} = qu_n + 40 = C_n(5) + 40.$$

Entre deux horaires d'apport, la quantité suit donc une courbe exponentielle décroissante. À l'instant d'un nouvel apport, elle augmente instantanément de 40 unités : le graphique global est formé d'arcs exponentiels décroissants séparés par des sauts verticaux de 40.

9

(a) En régime stabilisé, la quantité juste après un apport est proche de L . Sur les 5 heures suivantes, on l'approche donc par

$$C(t) = L e^{-t/10}, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

(b) On a

$$C(0) = L \quad \text{et} \quad C'(0) = -\frac{L}{10}.$$

L'équation de la tangente en 0 est

$$T(t) = L - \frac{L}{10}t = L \left(1 - \frac{t}{10}\right).$$

(c) Une heure après l'apport, la tangente donne

$$T(1) = 0,9L.$$

Le modèle exponentiel donne

$$C(1) = Le^{-0,1} \simeq 0,90484L.$$

Ainsi,

$$T(1) \simeq 0,900L, \quad C(1) \simeq 0,905L.$$

L'approximation tangentielle est très proche de la valeur exponentielle, mais elle la sous-estime d'environ $0,00484L$.

III Deux oublis possibles : probabilités conditionnelles

Dans cette partie et les suivantes, on revient au modèle simplifié

$$q = 0,6, \quad L = 100.$$

À $t = 0$, la quantité vaut 100.

10

On a

$$P(A) = 0,90, \quad P(\bar{A}) = 0,10.$$

Sur la branche A ,

$$P(B \mid A) = 0,95, \quad P(\bar{B} \mid A) = 0,05.$$

Sur la branche $\bar{A}$,

$$P(B \mid \bar{A}) = 0,75, \quad P(\bar{B} \mid \bar{A}) = 0,25.$$

On obtient donc

$$P(A \cap B) = 0,90 \times 0,95 = 0,855,$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,90 \times 0,05 = 0,045,$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,10 \times 0,75 = 0,075,$$

et

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,10 \times 0,25 = 0,025.$$

La somme vaut bien 1.

11

Les événements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B , donc

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,855 + 0,075.$$

Ainsi,

$$P(B) = 0,93.$$

Si A et B étaient indépendants, on aurait $P(B | A) = P(B)$. Or

$$0,95 \neq 0,93.$$

Donc

A et B ne sont pas indépendants.

IV Une quantité aléatoire

12

On part de 100 à $t = 0$.

- Si A est réalisé, il reste $0,6 \times 100 = 60$ juste avant $t = 5$, puis l'apport fait remonter la quantité à 100. Si B est ensuite réalisé, le même cycle recommence : à $t = 10$, juste après l'apport, $X = 100$.
- Si A est réalisé mais pas B , la quantité vaut 100 juste après $t = 5$, puis 60 à $t = 10$: $X = 60$.
- Si A n'est pas réalisé, la quantité vaut 60 à $t = 5$. Cinq heures plus tard, elle vaut $0,6 \times 60 = 36$ juste avant $t = 10$. Si B est réalisé, on ajoute 40 : $X = 76$.
- Si aucun des deux apports n'est réalisé, on reste à $X = 36$.

Ainsi,

$$A \cap B \implies X = 100,$$

$$A \cap \bar{B} \implies X = 60,$$

$$\bar{A} \cap B \implies X = 76,$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} \implies X = 36.$$

13

La loi de X est donc :

x	36	60	76	100
$P(X = x)$	0,025	0,045	0,075	0,855

L'espérance vaut

$$E(X) = 36 \times 0,025 + 60 \times 0,045 + 76 \times 0,075 + 100 \times 0,855,$$

d'où

$$\mu = E(X) = 94,80.$$

Pour la variance, on repart de sa définition :

$$\begin{aligned} V(X) &= 0,025(36 - 94,8)^2 + 0,045(60 - 94,8)^2 \\ &\quad + 0,075(76 - 94,8)^2 + 0,855(100 - 94,8)^2. \end{aligned}$$

On obtient

$$V(X) = 190,56.$$

Enfin,

$$\sigma(X) = \sqrt{190,56} \simeq 13,80.$$

L'espérance 94,80 est inférieure à 100, la quantité obtenue lorsque les deux apports sont effectués. Les oublis abaissent donc la quantité moyenne dans ce modèle.

V Pourquoi la moyenne apparaît naturellement

14

Si les valeurs possibles de X sont x_i et leurs probabilités p_i , alors

$$F(a) = \sum_i p_i (x_i - a)^2.$$

En développant,

$$F(a) = \sum_i p_i x_i^2 - 2a \sum_i p_i x_i + a^2 \sum_i p_i.$$

Or

$$\sum_i p_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_i p_i x_i = E(X) = \mu.$$

Ainsi,

$$F(a) = a^2 - 2\mu a + E(X^2).$$

15

En repartant de la définition,

$$V(X) = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2.$$

En développant,

$$V(X) = \sum_i p_i x_i^2 - 2\mu \sum_i p_i x_i + \mu^2 \sum_i p_i.$$

Or

$$\sum_i p_i x_i = \mu \quad \text{et} \quad \sum_i p_i = 1.$$

Ainsi,

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

D'autre part,

$$F(a) = a^2 - 2\mu a + E(X^2)$$

et donc

$$F(a) = a^2 - 2\mu a + \mu^2 + V(X).$$

Ainsi,

$$F(a) = (a - \mu)^2 + V(X).$$

Le carré $(a - \mu)^2$ est minimal, et vaut 0, lorsque

$$a = \mu = E(X).$$

La valeur minimale de l'erreur quadratique moyenne est alors

$$F(\mu) = V(X).$$

IDÉE Ce résultat donne un sens précis à l'espérance. Si l'on doit remplacer toute la distribution de X par un seul nombre et que les écarts sont pénalisés par leur carré, l'espérance est exactement le choix qui minimise l'erreur moyenne.

Pour prendre du recul

Le problème a utilisé plusieurs modèles pour étudier une même situation. La suite ne conserve que les valeurs juste après les apports ; l'exponentielle décrit l'évolution pendant les 5 heures qui les séparent ; les probabilités permettent de prendre en compte le fait que certains apports peuvent ne pas avoir lieu. Le passage d'un outil à l'autre correspond donc à un changement de question, pas à un changement de situation.

La dernière partie explique aussi pourquoi l'espérance apparaît naturellement lorsqu'on veut résumer une variable aléatoire par un seul nombre. Dès que l'erreur est mesurée par le carré de l'écart, choisir l'espérance est optimal : aucun autre nombre fixe ne donne une erreur quadratique moyenne plus petite. Cette propriété est l'une des raisons du rôle central de la moyenne en statistique et prépare l'idée des méthodes de moindres carrés.

SOURCES

University of Sheffield, « Repeated intravenous bolus doses », *Introducing Mathematical Biology*. [Lien direct](#)

Worcester Polytechnic Institute, « Geometric Series and Effective Medicine Dosage ». [Lien direct](#)