

Doses répétées

Suites · Fonction exponentielle ·

Dérivation · Probabilités

conditionnelles · Variables

aléatoires · Second degré ·

Algorithmique

Ce problème part d'une situation simple : une quantité diminue au cours du temps et reçoit, à des instants réguliers, des apports fixes. Nous allons étudier cette même situation à l'aide de plusieurs modèles, chacun adapté à une question précise : une suite pour suivre les valeurs juste après les apports, une fonction exponentielle pour décrire l'évolution entre deux apports, puis un modèle probabiliste lorsque certains apports peuvent être oubliés. L'un des objectifs du problème est de comprendre comment ces descriptions se complètent : la suite donnera une vue discrète de l'évolution, tandis que l'exponentielle permettra de comprendre d'où vient sa relation de récurrence.

En l'absence de nouvel apport, si la quantité vaut Q_0 à un instant pris comme origine, alors, t heures plus tard, elle vaut

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/10}.$$

Un apport est programmé toutes les 5 heures. Lorsqu'il a lieu, il ajoute instantanément 40 unités à la quantité alors présente.

Sur les 5 heures qui séparent deux horaires d'apport, la décroissance précédente correspond au coefficient multiplicateur $e^{-5/10} = e^{-1/2}$. On pose donc

$$q = e^{-1/2}.$$

Autrement dit, entre l'instant immédiatement après un apport et l'instant juste avant l'horaire suivant, la quantité est multipliée par q .

I Accumulation : un modèle discret

Dans cette première partie, tous les apports ont lieu. On prend comme origine l'instant où le premier apport vient d'être effectué : la quantité vaut alors 40. Pour $n \geq 0$, on note u_n la quantité présente **immédiatement après** le $(n+1)$ -ième apport. Ainsi,

$$u_0 = 40.$$

Pour passer de u_n à u_{n+1} , on part donc de la quantité présente juste après un apport, on laisse s'écouler 5 heures de décroissance, puis on ajoute les 40 unités de l'apport suivant.

- 1 Calculer u_1 , u_2 puis u_3 . Pour ces calculs, on utilisera l'arrondi à 10^{-1} de q .

Jusqu'à la fin de cette partie, on conservera cette valeur arrondie et l'on prendra donc

$$q = 0,6.$$

- 2 En s'aidant des données de l'énoncé, justifier la relation de récurrence

$$u_{n+1} = qu_n + 40.$$

3 On cherche une quantité L qui resterait inchangée d'un apport au suivant.

(a) Résoudre l'équation

$$L = qL + 40.$$

(b) On pose $v_n = u_n - L$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis établir

$$u_n = L(1 - q^{n+1}).$$

(c) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = 40(1 + q + \dots + q^n).$$

Pour $n = 3$, expliquer ce que représentent concrètement les quatre termes 40 , $40q$, $40q^2$ et $40q^3$. Généraliser cette interprétation à u_n .

4 Montrer que $u_n < L$ pour tout n , puis que la suite (u_n) est croissante. On admet ici que q^n tend vers 0 lorsque $0 < q < 1$. Déterminer la valeur vers laquelle se rapprochent les quantités immédiatement après les apports.

5 On note w_n la quantité présente **immédiatement avant** l'apport suivant.

(a) Exprimer w_n en fonction de u_n , puis montrer que

$$w_n = u_{n+1} - 40.$$

(b) Déterminer les deux valeurs vers lesquelles se rapprochent respectivement les quantités juste après et juste avant un apport.

Le programme suivant reprend le modèle numérique de cette partie. Il cherche le premier rang à partir duquel la quantité u_n est à moins de ε unité de la valeur d'équilibre L .

```
q = 0.6
L = 40/(1-q)

def rang(eps):
    n = 0
    u = 40
    while .....:
        u = .....
        n = .....
    return n
```

6 (a) Compléter les trois lignes à trous du programme.

(b) Déterminer, par calculs successifs ou à l'aide de la formule de u_n , la valeur renvoyée par `rang(1)`.

II Entre deux apports : le modèle continu

À partir de cette partie, on ne conserve plus l'approximation numérique $q = 0,6$ utilisée dans la partie I. On revient au modèle initial exact :

$$q = e^{-1/2}.$$

Les notations u_n et L désignent donc ici les valeurs correspondant à ce modèle exact, avec

$$L = \frac{40}{1-q}.$$

Pendant les 5 heures qui suivent le $(n+1)$ -ième apport, on note

$$C_n(t) = u_n e^{-t/10}, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

- 7 Calculer $C'_n(t)$ et étudier le sens de variation de C_n sur $[0; 5]$. Retrouver ainsi les quantités maximale et minimale observées pendant cet intervalle.
- 8 Vérifier les deux relations

$$C_n(5) = qu_n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = C_n(5) + 40.$$

Expliquer pourquoi le graphique global de la quantité en fonction du temps est constitué d'arcs exponentiels décroissants séparés par des sauts de 40 unités.

- 9 Lorsque le régime est stabilisé, la quantité juste après un apport est proche de L .
 - (a) Écrire la fonction qui décrit alors approximativement la quantité durant un intervalle de 5 heures.
 - (b) Déterminer l'équation de sa tangente au temps $t = 0$.
 - (c) Utiliser cette tangente pour approcher la quantité une heure après l'apport. Comparer avec la valeur donnée par le modèle exponentiel en exprimant les deux résultats comme des multiples de L .

III Deux oublis possibles : probabilités conditionnelles

Dans les trois dernières parties, on adopte de nouveau le modèle numérique simplifié

$$q = 0,6, \quad L = \frac{40}{1-0,6} = 100.$$

À l'instant $t = 0$, un apport vient d'être effectué et la quantité vaut donc 100. Deux nouveaux apports sont prévus aux instants $t = 5$ h et $t = 10$ h, mais chacun peut être oublié.

On note :

- A : « l'apport prévu à $t = 5$ h est effectué », avec $P(A) = 0,90$;
- B : « l'apport prévu à $t = 10$ h est effectué ».

On suppose

$$P(B | A) = 0,95, \quad P(B | \bar{A}) = 0,75.$$

- 10 Construire l'arbre pondéré correspondant. En déduire les probabilités des quatre événements

$$A \cap B, \quad A \cap \bar{B}, \quad \bar{A} \cap B, \quad \bar{A} \cap \bar{B}.$$

- 11 Calculer $P(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

IV Une quantité aléatoire

On note X la quantité présente immédiatement après l'horaire $t = 10$ h. Entre deux horaires successifs, la quantité est multipliée par 0,6 ; lorsqu'un apport est effectué, 40 unités sont ajoutées.

- 12 En partant de la quantité 100 à l'instant $t = 0$, montrer que

$$A \cap B \implies X = 100,$$

$$A \cap \bar{B} \implies X = 60,$$

$$\bar{A} \cap B \implies X = 76,$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} \implies X = 36.$$

- 13 Donner la loi de X . Calculer, à 10^{-2} près,

(a) son espérance $\mu = E(X)$;

(b) sa variance $V(X)$;

(c) son écart type $\sigma(X)$.

Comparer $E(X)$ à la valeur 100 correspondant aux deux apports effectués.

V Pourquoi la moyenne apparaît naturellement

On conserve la notation $\mu = E(X)$. Si X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i , on note

$$E(X^2) = \sum_i p_i x_i^2.$$

Pour un réel a , on définit

$$F(a) = E((X - a)^2) = \sum_i p_i (x_i - a)^2.$$

Cette quantité mesure l'erreur quadratique moyenne commise lorsqu'on résume la valeur aléatoire X par le nombre fixe a .

- 14 En partant de la loi de X , montrer que

$$F(a) = a^2 - 2\mu a + E(X^2).$$

- 15 En repartant de la définition

$$V(X) = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2,$$

montrer d'abord que

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2.$$

En déduire

$$F(a) = (a - \mu)^2 + V(X).$$

Pour quelle valeur de a l'erreur quadratique moyenne est-elle minimale ? Quelle est alors sa valeur minimale ?

Ce devoir a étudié une même situation à l'aide de plusieurs modèles, chacun répondant à une question différente. La suite (u_n) décrit l'évolution d'un horaire d'apport au suivant ; la fonction exponentielle précise ce qui se passe pendant les 5 heures qui les séparent ; les probabilités permettent ensuite de tenir compte de l'incertitude sur la réalisation des apports. Ces descriptions ne sont donc pas juxtaposées : elles se complètent pour répondre à des questions différentes sur la même situation.

Le dernier résultat donne en plus un sens précis à l'espérance. Si l'on veut remplacer une valeur aléatoire par un seul nombre et que l'on mesure l'erreur par le carré de l'écart, l'espérance est exactement le nombre qui rend l'erreur moyenne la plus petite. Autrement dit, aucun autre nombre fixe ne représente mieux la variable aléatoire pour ce critère. C'est une première explication mathématique du rôle particulier que joue la moyenne lorsqu'on cherche à résumer des données incertaines.