

CORRIGÉ

Terminale · maths expertes · CORRIGÉ

CHAPITRES

Peut-on compter en binaire avec un nombre complexe ?

Nombres complexes · Divisibilité
et parité · Algorithmique ·
Raisonnement par descente

I Une base qui tourne

1

Avec $\beta = -1 + i$,

$$\beta^2 = (-1 + i)^2 = -2i.$$

Puis

$$\beta^3 = (-2i)(-1 + i) = 2 + 2i,$$

et

$$\beta^4 = (2 + 2i)(-1 + i) = -4.$$

Ainsi

$$\boxed{\beta^4 = -4}.$$

En élevant cette égalité au carré,

$$\boxed{\beta^8 = 16}.$$

2

Par définition,

$$(10)_\beta = \beta = -1 + i, \quad (11)_\beta = 1 + \beta = i.$$

Ensuite,

$$(1100)_\beta = \beta^3 + \beta^2 = (2 + 2i) - 2i = 2,$$

$$(1101)_\beta = \beta^3 + \beta^2 + 1 = 3,$$

et

$$(100000000)_\beta = \beta^8 = 16.$$

On obtient donc directement des entiers réels positifs à partir d'une base complexe :

$$\boxed{2 = (1100)_\beta, \quad 3 = (1101)_\beta, \quad 16 = (100000000)_\beta.}$$

II Quel doit être le dernier chiffre ?

3

On rationalise le dénominateur :

$$\frac{a+ib}{-1+i} = \frac{(a+ib)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}.$$

Le dénominateur vaut 2, tandis que

$$(a+ib)(-1-i) = (b-a) - i(a+b).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\frac{a+ib}{-1+i} = \frac{b-a}{2} - i \frac{a+b}{2}}.$$

Ce quotient appartient à $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $b-a$ et $a+b$ sont pairs. Cela équivaut à dire que a et b ont la même parité. Ainsi,

$$\boxed{\frac{a+ib}{\beta} \in \mathbb{Z}[i] \iff a \text{ et } b \text{ ont la même parité.}}$$

4

(a) Si a et b ont la même parité, alors $z = a + ib$ est divisible par β au sens de la question, tandis que les coordonnées de

$$z - 1 = (a - 1) + ib$$

ont des parités différentes.

Inversement, si a et b ont des parités différentes, alors z n'est pas divisible par β , mais $a - 1$ et b ont la même parité : $z - 1$ l'est.

Exactement l'un des deux nombres z et $z - 1$ convient.

(b) Le chiffre des unités est donc imposé :

$$\boxed{\varepsilon_0 = \begin{cases} 0, & \text{si } a \text{ et } b \text{ ont la même parité,} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Alors

$$z_1 = \frac{z - \varepsilon_0}{\beta} \in \mathbb{Z}[i]$$

et

$$z = \varepsilon_0 + \beta z_1.$$

En utilisant la formule de la question 3 avec $z - \varepsilon_0 = (a - \varepsilon_0) + ib$, on obtient aussi

$$\boxed{z_1 = \frac{b - a + \varepsilon_0}{2} - i \frac{a + b - \varepsilon_0}{2}}.$$

5

Partons de $z_0 = 4 + 3i$. À chaque ligne, le chiffre est déterminé par la parité des deux coordonnées.

k	z_k	ε_k	z_{k+1}
0	$4 + 3i$	1	$-3i$
1	$-3i$	1	$-1 + 2i$
2	$-1 + 2i$	1	2
3	2	0	$-1 - i$
4	$-1 - i$	0	i
5	i	1	1
6	1	1	0

Les chiffres sont obtenus du rang le plus faible au rang le plus élevé :

$$\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_6 = 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1.$$

L'écriture se lit donc dans l'autre sens :

$$4 + 3i = (1100111)_\beta.$$

Pour la vérifier, on utilise

$$\beta^5 = -4\beta = 4 - 4i, \quad \beta^6 = -4\beta^2 = 8i.$$

Alors

$$\begin{aligned} (1100111)_\beta &= \beta^6 + \beta^5 + \beta^2 + \beta + 1 \\ &= 8i + (4 - 4i) - 2i + (-1 + i) + 1 \\ &= 4 + 3i. \end{aligned}$$

III L'algorithme finit-il toujours ?

6

(a) À chaque étape,

$$z_k = \varepsilon_k + \beta z_{k+1}.$$

En remplaçant successivement z_1, z_2 puis z_3 , on obtient

$$z = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\beta^3 + \beta^4 z_4.$$

Comme $\beta^4 = -4$,

$$z = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\beta^3 - 4z_4.$$

(b) Avec

$$r = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\beta^3$$

et

$$\beta = -1 + i, \quad \beta^2 = -2i, \quad \beta^3 = 2 + 2i,$$

il vient

$$r = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3) + i(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3).$$

Comme chaque ε_j vaut 0 ou 1,

$$-1 \leq \varepsilon_0 - \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 \leq 3$$

et

$$-2 \leq \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 \leq 3.$$

Donc

$$|\operatorname{Re}(r)| \leq 3, \quad |\operatorname{Im}(r)| \leq 3.$$

7 _____

Écrivons

$$z = a + ib, \quad z_4 = A + iB, \quad r = u + iv.$$

La relation $z = r - 4z_4$ donne

$$a = u - 4A, \quad b = v - 4B,$$

donc

$$A = \frac{u - a}{4}, \quad B = \frac{v - b}{4}.$$

Puisque $|u| \leq 3$ et $|v| \leq 3$,

$$|A| \leq \frac{|a| + 3}{4}, \quad |B| \leq \frac{|b| + 3}{4}.$$

Ainsi,

$$M(z_4) \leq \frac{M(z) + 3}{4}.$$

Si $M(z) > 1$, alors

$$M(z) + 3 < 4M(z),$$

d'où

$$M(z_4) < M(z).$$

Les coordonnées des z_k étant entières, $M(z_k)$ est un entier naturel. Tant que $M > 1$, chaque bloc de quatre étapes fait donc strictement diminuer cet entier. Une descente stricte dans $\mathbb{N}$ ne peut pas durer indéfiniment : après un nombre fini de blocs, on atteint nécessairement un entier de Gauss w tel que

$$M(w) \leq 1.$$

8

Les huit entiers de Gauss non nuls tels que $M(w) \leq 1$ sont

$$1, -1, i, -i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i.$$

La règle de la partie II donne les transitions suivantes :

$$\begin{aligned} 1-i &\longrightarrow -1 \longrightarrow 1+i \longrightarrow -i \longrightarrow i \longrightarrow 1 \longrightarrow 0, \\ -1+i &\longrightarrow 1 \longrightarrow 0, \quad -1-i \longrightarrow i \longrightarrow 1 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Ces trois chaînes contiennent les huit valeurs possibles et atteignent toutes 0.

Tout entier de Gauss finit donc par atteindre 0. En remontant les relations

$$z_k = \varepsilon_k + \beta z_{k+1},$$

on obtient une écriture finie

$$z = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\beta + \cdots + \varepsilon_n\beta^n, \quad \varepsilon_k \in \{0, 1\}.$$

Ainsi,

tout entier de Gauss possède au moins une écriture finie en base β .

IV Peut-il y avoir deux écritures ?

9

Supposons

$$z = (\varepsilon_n \cdots \varepsilon_0)_\beta = (\delta_m \cdots \delta_0)_\beta.$$

Dans la première écriture, $z - \varepsilon_0$ a un quotient par β dans $\mathbb{Z}[i]$. Dans la seconde, il en va de même pour $z - \delta_0$.

Or la question 4 a montré qu'il existe un *unique* chiffre parmi 0 et 1 ayant cette propriété. Par conséquent,

$$\varepsilon_0 = \delta_0.$$

Retirons ce chiffre commun puis divisons par β :

$$\frac{z - \varepsilon_0}{\beta} = (\varepsilon_n \cdots \varepsilon_1)_\beta = (\delta_m \cdots \delta_1)_\beta.$$

Le même raisonnement impose alors $\varepsilon_1 = \delta_1$, puis $\varepsilon_2 = \delta_2$, et ainsi de suite.

Si l'une des écritures est plus courte, on peut la compléter à gauche par des zéros sans en changer la valeur. Tous les chiffres coïncident donc. Une fois les zéros initiaux supprimés, l'écriture est unique.

10

On obtient le résultat suivant :

Tout entier de Gauss $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, possède une unique représentation finie normalisée

$$a + ib = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k (-1 + i)^k, \quad \varepsilon_k \in \{0, 1\}.$$

Pour un nombre non nul, le chiffre de plus haut rang est 1 ; le nombre 0 est représenté par 0.

V Un signe moins devenu inutile

11

Comme

$$1 + \beta = 1 + (-1 + i) = i,$$

on a

$$i = (11)_\beta.$$

De même,

$$1 + \beta + \beta^2 = 1 + (-1 + i) - 2i = -i,$$

donc

$$-i = (111)_\beta.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} (11101)_\beta &= \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + 1 \\ &= -4 + (2 + 2i) - 2i + 1 \\ &= -1, \end{aligned}$$

d'où

$$-1 = (11101)_\beta.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (11011)_\beta &= \beta^4 + \beta^3 + \beta + 1 \\ &= -4 + (2 + 2i) + (-1 + i) + 1 \\ &= -2 + 3i, \end{aligned}$$

et

$$1 + 1 = 2 = (1100)_\beta.$$

Les puissances de $-1 + i$ changent elles-mêmes de signe et de direction dans le plan complexe. Les chiffres n'ont donc pas à porter séparément ces informations : une seule chaîne de 0 et de 1 peut coder simultanément la partie réelle, la partie imaginaire et leurs signes.

Repère historique

Dans son article de 1965 *A "Binary" System for Complex Numbers*, Walter Penney présente la base $-1 + i$ avec les seuls chiffres 0 et 1, et met en avant la possibilité de représenter en une seule écriture les nombres complexes à coordonnées entières. L'argument de terminaison par blocs de quatre utilisé aux questions 6 à 8 est une démonstration élémentaire distincte.

SOURCES

Walter Penney — A "Binary" System for Complex Numbers, Journal of the ACM, vol. 12, no 2, 1965, p. 247-248. [Lien direct](#)