

Ce que cache $(1+i)^n$

Nombres complexes · Binôme de
Newton · Dénombrement

On part d'une puissance qui paraît très simple. En la regardant de plusieurs façons, on va faire apparaître une structure qu'un calcul direct laisse difficilement deviner.

Dans tout le problème, on utilise seulement les premières règles de calcul sur les nombres complexes, en particulier $i^2 = -1$.

I Une puissance à observer

1 Calculer sous forme algébrique

$$(1+i), \quad (1+i)^2, \quad (1+i)^3, \quad (1+i)^4.$$

Sans recommencer les calculs depuis le début, en déduire ensuite

$$(1+i)^5, \quad (1+i)^6, \quad (1+i)^7, \quad (1+i)^8.$$

Conjecturer une relation simple entre $(1+i)^{n+4}$ et $(1+i)^n$.

Pour tout entier naturel n , on écrit désormais

$$(1+i)^n = A_n + iB_n,$$

où A_n et B_n sont réels.

2 Démontrer la relation conjecturée à la question précédente. Tout entier naturel n peut s'écrire

$$n = 4q + r, \quad q \in \mathbb{N}, \quad r \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Déterminer $(1+i)^n$, puis A_n et B_n , dans chacun des quatre cas possibles pour r .

II La même puissance, autrement

On pourra utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$$

la somme obtenue en conservant les indices pairs inférieurs ou égaux à n , et

$$T_n = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots$$

la somme analogue portant sur les indices impairs. On convient que $T_0 = 0$.

- 3 Développer $(1+i)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, puis regrouper les termes selon la parité de leur indice. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = S_n \quad \text{et} \quad B_n = T_n.$$

- 4 En confrontant les deux façons de calculer $(1+i)^n$, déterminer exactement S_n et T_n lorsque

$$n = 4q, \quad 4q+1, \quad 4q+2, \quad 4q+3.$$

III Deux sommes, une seule identité

- 5 En utilisant $(1+i)^{n+1}$, exprimer A_{n+1} et B_{n+1} en fonction de A_n et B_n . En déduire que la suite

$$C_n = A_n^2 + B_n^2$$

est géométrique, puis déterminer C_n . Traduire le résultat obtenu à l'aide de S_n et T_n .

Prérequis pour la partie IV. Cette partie suppose connu le chapitre de dénombrement de Terminale spécialité mathématiques : coefficients binomiaux et nombre de parties d'un ensemble fini.

IV Ce que comptent ces sommes

Soit $n \geq 2$ et soit E un ensemble à n éléments. Pour $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note N_r le nombre de parties de E dont le cardinal est de la forme $4q + r$, avec $q \in \mathbb{N}$.

- 6 (a) À l'aide de la signification combinatoire de $\binom{n}{k}$, montrer que

$$S_n = N_0 - N_2 \quad \text{et} \quad T_n = N_1 - N_3.$$

(b) Fixer un élément $x \in E$. À chaque partie de E ne contenant pas x , associer la partie obtenue en lui ajoutant x . Expliquer pourquoi cela permet de partager les parties de E en paires formées d'une partie de cardinal pair et d'une partie de cardinal impair. En déduire que

$$N_0 + N_2 = N_1 + N_3 = 2^{n-1}.$$

- (c) Exprimer chacun des quatre nombres N_0, N_1, N_2, N_3 en fonction de S_n, T_n et d'une puissance de 2.
(d) Réécrire l'identité obtenue à la question 5 uniquement à l'aide de N_0, N_1, N_2, N_3 . Que représente le membre de droite ? Que mesurent les deux différences qui apparaissent dans le membre de gauche ?

V Un ensemble de 1000 éléments

- 7 (a) Sans calculer individuellement aucun coefficient binomial, déterminer exactement

$$\Sigma = \binom{1000}{0} - \binom{1000}{2} + \binom{1000}{4} - \cdots + \binom{1000}{1000}$$

et

$$\Theta = \binom{1000}{1} - \binom{1000}{3} + \binom{1000}{5} - \cdots - \binom{1000}{999}.$$

(b) On considère maintenant un ensemble à 1000 éléments. Déterminer exactement le nombre de ses parties dont le cardinal est de la forme $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ puis $4q + 3$.