

CORRIGÉ

Terminale · maths expertes · CORRIGÉ

CHAPITRES

Le détour par l'imaginaire

Nombres complexes · Polynômes ·
Équations du second degré

I Une équation entièrement réelle

1

Commençons par tester quelques entiers simples. On obtient

$$P(4) = 4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0.$$

Ainsi, 4 est une racine de P et P est divisible par $x - 4$. La division donne

$$P(x) = (x - 4)(x^2 + 4x + 1).$$

Le trinôme $x^2 + 4x + 1$ a pour discriminant

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0.$$

Il possède donc deux racines réelles distinctes. De plus,

$$4^2 + 4 \times 4 + 1 = 33 \neq 0,$$

donc aucune d'elles n'est égale à 4. L'équation $P(x) = 0$ possède ainsi exactement trois solutions réelles distinctes, sans qu'il soit nécessaire de déterminer encore les deux racines du trinôme.

IDÉE Autre méthode, si le chapitre sur la continuité des fonctions a déjà été étudié en Terminale spécialité : la fonction polynomiale P est continue sur $\mathbb{R}$. Les signes $P(-4) < 0 < P(-3)$, $P(-1) > 0 > P(0)$ et $P(3) < 0 < P(5)$ donnent, par le théorème des valeurs intermédiaires, trois racines dans trois intervalles disjoints. Comme P est de degré 3, il ne peut en avoir davantage.

II Une décomposition qui simplifie la cubique

2

Puisque $x = u + v$,

$$P(u + v) = (u + v)^3 - 15(u + v) - 4.$$

Or

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Par conséquent,

$$P(u + v) = u^3 + v^3 + (3uv - 15)(u + v) - 4.$$

3 _____

Le choix naturel consiste à annuler le coefficient de $u + v$:

$$3uv - 15 = 0,$$

d'où

$$\boxed{uv = 5}.$$

Sous cette condition,

$$P(u + v) = u^3 + v^3 - 4.$$

Il suffit donc d'imposer également

$$\boxed{u^3 + v^3 = 4}.$$

Ces deux conditions sont choisies pour rendre le calcul efficace : elles sont suffisantes pour que $x = u + v$ soit une racine.

4 _____

(a) Avec $U = u^3$ et $V = v^3$, on obtient

$$\boxed{U + V = 4}.$$

De plus,

$$UV = u^3v^3 = (uv)^3 = 5^3 = 125,$$

donc

$$\boxed{UV = 125}.$$

(b) Deux nombres de somme 4 et de produit 125 sont les racines de

$$\boxed{X^2 - 4X + 125 = 0}.$$

(c) Le discriminant vaut

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 125 = 16 - 500 = -484 = (22i)^2.$$

Ainsi,

$$X = \frac{4 \pm 22i}{2},$$

et, à l'ordre près,

$$\boxed{U = 2 + 11i, \quad V = 2 - 11i.}$$

5

(a) Le gain est structurel. L'équation de départ est de degré 3 en x . Après le choix $uv = 5$, les deux cubes $U = u^3$ et $V = v^3$ sont déterminés uniquement par leur somme et leur produit ; on les trouve donc en résolvant une équation du second degré. La substitution transforme ainsi la partie difficile de la cubique en un problème algébrique déjà familier.

(b) Les nombres $U = 2 + 11i$ et $V = 2 - 11i$ ne sont pas réels. Ils ne peuvent donc pas être les cubes de deux nombres réels. Pourtant, la partie I a déjà établi que les trois racines de l'équation initiale sont réelles. Ce n'est pas un échec de la méthode : le calcul a réellement simplifié le problème, mais son efficacité conduit à manipuler des nombres au-delà de $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{C}$, la stratégie peut continuer ; nous allons voir que les quantités non réelles se combineront finalement pour produire une racine réelle.

Dans la notation moderne, le calcul historique s'écrit aussi avec $\sqrt{-121} = 11i$, donc avec les quantités $2 \pm \sqrt{-121} = 2 \pm 11i$. Bombelli n'utilisait pas le symbole i : il introduisait notamment les expressions italiennes *più di meno* et *meno di meno* pour distinguer les nouvelles quantités qu'il manipulait.

III Le détour complexe revient vers les réels

6

On cherche $u = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, tel que $u^3 = 2 + 11i$.

(a) En prenant les modules,

$$|u|^3 = |2 + 11i| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} = (\sqrt{5})^3.$$

Donc $|u| = \sqrt{5}$. Comme $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$,

$$\boxed{a^2 + b^2 = 5}.$$

(b) Puisque a, b sont entiers, leurs carrés sont 1 et 4. Ainsi $(|a|, |b|)$ vaut $(2, 1)$ ou $(1, 2)$. Développons

$$(a + ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3).$$

La partie réelle doit être égale à 2. Les quatre valeurs possibles de a donnent respectivement :

$$a = 2 \Rightarrow a^3 - 3ab^2 = 2, \quad a = -2 \Rightarrow -2,$$

$$a = 1 \Rightarrow -11, \quad a = -1 \Rightarrow 11.$$

Il faut donc $a = 2$, puis $b^2 = 1$. La partie imaginaire vaut alors

$$3a^2b - b^3 = 12b - b = 11b.$$

Pour obtenir 11, il faut $b = 1$. Ainsi

$$\boxed{u = 2 + i}.$$

(c) Vérifions directement :

$$(2 + i)^2 = 3 + 4i,$$

puis

$$(2+i)^3 = (3+4i)(2+i) = 6+3i+8i+4i^2 = 2+11i.$$

Donc

$$\boxed{(2+i)^3 = 2+11i}.$$

7 _____

Le conjugué de $u = 2+i$ est $\bar{u} = 2-i$. La conjugaison commute avec les puissances entières, donc

$$(2-i)^3 = \overline{(2+i)^3} = \overline{2+11i} = 2-11i.$$

On peut prendre

$$\boxed{v = 2-i}.$$

Enfin,

$$uv = (2+i)(2-i) = 4-i^2 = 5.$$

Les trois conditions sont donc simultanément satisfaites.

8 _____

On obtient

$$x = u + v = (2+i) + (2-i) = 4.$$

Ainsi la méthode retrouve bien la racine réelle

$$\boxed{x = 4}.$$

Les parties imaginaires se sont annulées dans la somme.

IV Retrouver toutes les solutions

9 _____

La question 1 a donné la factorisation

$$P(x) = (x-4)(x^2+4x+1).$$

Résolvons maintenant le trinôme. Son discriminant vaut

$$\Delta = 16 - 4 = 12.$$

Ses racines sont

$$\frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Les trois solutions exactes sont donc

$$\boxed{4, \quad -2 - \sqrt{3}, \quad -2 + \sqrt{3}}.$$

Elles sont toutes réelles.

10

La question 1 avait établi, sans déterminer toutes leurs valeurs, que les trois solutions étaient réelles et distinctes. La résolution complète confirme ce résultat.

La substitution $x = u + v$ a rendu le calcul commode en ramenant la détermination de u^3 et v^3 à une équation quadratique. Cette simplification fait apparaître des nombres non réels, qui peuvent être manipulés de façon cohérente puis se combiner pour redonner des nombres réels. Les complexes ne servent donc pas seulement à fournir des solutions lorsque les réels ne suffisent plus : ils peuvent aussi constituer des intermédiaires algébriques efficaces dans un problème dont le départ et l'arrivée sont entièrement réels.

V Prolongement facultatif : les autres choix

11

(a) Calculons

$$\omega^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

et

$$\omega^2 = \bar{\omega}.$$

En multipliant $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ par $\omega - 1$, on obtient

$$\omega^3 - 1 = 0.$$

Donc

$$\boxed{\omega^3 = 1}.$$

(b) Puisque $\omega^3 = 1$,

$$(\omega u)^3 = u^3 = 2 + 11i, \quad (\omega^2 v)^3 = \omega^6 v^3 = v^3 = 2 - 11i.$$

De plus,

$$(\omega u)(\omega^2 v) = \omega^3 uv = 5.$$

Le couple $(\omega u, \omega^2 v)$ convient. Le même calcul montre que $(\omega^2 u, \omega v)$ convient également.

(c) Avec $u = 2 + i$ et $v = 2 - i$,

$$\omega u = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right).$$

Comme $\omega^2 v = \bar{\omega u}$,

$$\omega u + \omega^2 v = 2 \operatorname{Re}(\omega u) = -2 - \sqrt{3}.$$

De même,

$$\omega^2 u + \omega v = -2 + \sqrt{3}.$$

Les trois couples compatibles conduisent donc exactement aux trois racines

$$\boxed{4, \quad -2 - \sqrt{3}, \quad -2 + \sqrt{3}.}$$

Cette partie explique pourquoi il serait trompeur de parler sans précaution de « la » racine cubique d'un nombre complexe.

Repère historique

La résolution algébrique des cubiques ne doit pas être attribuée à Cardano seul. Dans l'*Ars Magna* (1545), Cardano rapporte une découverte antérieure de Scipione del Ferro et reconnaît que Niccolò Tartaglia avait retrouvé indépendamment une méthode qu'il lui avait communiquée. Bombelli, dans son *Algebra* publiée à partir de 1572, donne ensuite aux quantités que nous appelons aujourd'hui complexes un statut calculatoire beaucoup plus explicite.

Pour l'équation

$$x^3 = 15x + 4,$$

le calcul fait apparaître, en notation moderne, les deux quantités

$$2 + \sqrt{-121} \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{-121}.$$

Bombelli cherche alors des quantités dont les cubes leur correspondent et met en évidence ce que nous écrivons aujourd'hui $2 + \sqrt{-1}$ et $2 - \sqrt{-1}$; leur somme vaut 4. Le symbole i est postérieur : les écritures historiques de Bombelli sont différentes.

On appelle aujourd'hui *casus irreducibilis* le phénomène général dans lequel une cubique à trois racines réelles fait apparaître des quantités complexes lorsqu'on la résout par radicaux. Le problème étudié ici en fournit un exemple, sans prétendre démontrer ce résultat général.

SOURCES

Girolamo Cardano — *Artis magnae, sive de regulis algebraicis*, 1545, chapitre XI. [Lien direct](#)

Rafael Bombelli — *L'Algebra*, édition de Bologne, 1579, livre II. [Lien direct](#)