

Le détour par l'imaginaire

Nombres complexes · Polynômes ·
Équations du second degré

Au XVI^e siècle, la recherche de méthodes générales pour résoudre les équations du troisième degré conduit à une idée très efficace : remplacer l'inconnue par une somme choisie de façon à faire disparaître un terme gênant. Pour l'équation étudiée ici, ce détour transforme profondément le calcul. Il réserve aussi une surprise sur la nature des nombres qu'il faut accepter de manipuler.

I Une équation entièrement réelle

On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 - 15x - 4.$$

- 1 Montrer que l'équation $P(x) = 0$ possède exactement trois solutions réelles distinctes. Il n'est pas demandé de déterminer leurs trois valeurs exactes à ce stade.

IDÉE Une racine entière simple permettrait de ramener le problème à un polynôme du second degré.

II Une décomposition qui simplifie la cubique

On cherche maintenant une autre voie. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ et posons

$$x = u + v.$$

- 2 Montrer que

$$P(u + v) = u^3 + v^3 + (3uv - 15)(u + v) - 4.$$

- 3 Le terme $(3uv - 15)(u + v)$ empêche encore l'expression de ne dépendre que des cubes u^3 et v^3 . Choisir une condition simple sur uv qui le fasse disparaître, puis déterminer la condition qu'il reste à imposer pour obtenir $P(u + v) = 0$.

On pose désormais

$$U = u^3, \quad V = v^3.$$

- 4 (a) À partir des conditions précédentes, déterminer $U + V$ et UV .
(b) En déduire une équation du second degré dont U et V sont les solutions.
(c) Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
- 5 (a) Quel avantage algébrique la substitution $x = u + v$ vient-elle d'apporter par rapport à l'équation cubique de départ ?
(b) Les valeurs obtenues pour U et V pourraient-elles être les cubes de deux nombres réels ? Comparer avec la partie I et commenter la situation.

Quelques repères historiques éclairent ce calcul. Les méthodes de résolution des cubiques ont une histoire collective : Scipione del Ferro en découvre une forme, Niccolò Tartaglia la retrouve indépendamment, puis Girolamo Cardano la publie en 1545 en reconnaissant ces antériorités. Quelques décennies plus tard, Rafael Bombelli étudie systématiquement les calculs où apparaissent des racines carrées de nombres négatifs. L'équation $x^3 = 15x + 4$ est l'un de ses exemples célèbres. Nous utilisons ici la notation moderne i ; Bombelli écrivait ces quantités autrement.

III Le détour complexe revient vers les réels

Choisissons

$$u^3 = 2 + 11i, \quad v^3 = 2 - 11i,$$

tout en conservant la condition trouvée à la question 3.

- 6 Nous allons chercher une solution particulièrement simple de $u^3 = 2 + 11i$ sous la forme $u = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Rien ne garantit a priori qu'une telle solution existe.
 - (a) En utilisant les modules, montrer que nécessairement $a^2 + b^2 = 5$.
 - (b) En déduire les valeurs possibles de a et b , puis déterminer un complexe u qui convient.
 - (c) Vérifier directement le résultat obtenu en calculant u^3 .
- 7 À partir de u , construire sans nouvelle recherche un complexe v tel que $v^3 = 2 - 11i$. Vérifier également que la condition sur uv trouvée à la question 3 est satisfaite.
- 8 Retrouver ainsi une solution réelle de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$.

IV Retrouver toutes les solutions

- 9 Reprendre la factorisation obtenue à la question 1 et déterminer cette fois les trois solutions exactes de $P(x) = 0$.
- 10 Comparer le résultat de la question précédente avec ce que la question 1 permettait déjà d'affirmer. Expliquer alors en quelques lignes le rôle joué par les nombres complexes dans cette résolution.

V Prolongement facultatif : les autres choix

On pose

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- 11 (a) Vérifier que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, puis que $\omega^3 = 1$ et $\omega^2 = \bar{\omega}$.
 - (b) Si (u, v) est le couple construit aux questions 6 et 7, montrer que $(\omega u, \omega^2 v)$ et $(\omega^2 u, \omega v)$ satisfont les mêmes trois conditions $u^3 = 2 + 11i$, $v^3 = 2 - 11i$ et $uv = 5$.
 - (c) Calculer les deux nouvelles sommes correspondantes. Comparer avec les solutions de la question 9.