

CORRIGÉ

Terminale · spécialité maths · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°05 — Une fonction continue partout et dérivable nulle part

Suites et limites · Continuité ·
Dérivation · Taux d'accroissement

La fonction construite ici est la fonction de Takagi. Deux phénomènes s'opposent : la majoration géométrique des restes rend l'effet des nouvelles dents arbitrairement petit sur les valeurs de la fonction, tandis qu'à chaque nouvelle échelle une pente $+1$ ou -1 continue de s'ajouter.

I Une dent triangulaire

1

(a) Par définition,

$$\varphi(x+1) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x+1-k|.$$

Posons $j = k - 1$. Lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$, j parcourt lui aussi $\mathbb{Z}$, et

$$|x+1-k| = |x-j|.$$

Ainsi

$$\varphi(x+1) = \min_{j \in \mathbb{Z}} |x-j| = \varphi(x).$$

La fonction φ est donc 1-périodique.

(b) Soit $x \in [0, 1]$. Les distances de x aux entiers 0 et 1 sont respectivement x et $1-x$. Si $k \leq -1$, alors $|x-k| \geq 1$; si $k \geq 2$, alors $|x-k| \geq 1$. Or

$$\min(x, 1-x) \leq \frac{1}{2}.$$

Aucun entier autre que 0 ou 1 ne peut donc donner une distance plus petite. Le minimum est atteint pour 0 ou 1 — pour $x = 1/2$, il est atteint pour les deux — et

$$\varphi(x) = \min(x, 1-x).$$

(c) Sur $[0, 1/2]$, $\varphi(x) = x$; sur $[1/2, 1]$, $\varphi(x) = 1-x$. On a donc

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{2}$$

sur $[0, 1]$, puis sur $\mathbb{R}$ par périodicité. Le graphe est une succession de dents triangulaires de hauteur $1/2$ et de période 1.

2

Choisissons $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(y) = |y - p|$. Comme $\varphi(x)$ est la distance minimale de x à un entier,

$$\varphi(x) \leq |x - p|.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|x - p| \leq |x - y| + |y - p| = |x - y| + \varphi(y).$$

Donc

$$\varphi(x) - \varphi(y) \leq |x - y|.$$

En échangeant x et y ,

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leq |x - y|.$$

Les deux inégalités donnent

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|.$$

3

Puisque $0 \leq \varphi \leq 1/2$,

$$0 \leq f_n(x) = 2^{-n} \varphi(2^n x) \leq 2^{-n-1}.$$

D'après la question 2,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &= 2^{-n} |\varphi(2^n x) - \varphi(2^n y)| \\ &\leq 2^{-n} |2^n x - 2^n y| \\ &= |x - y|. \end{aligned}$$

II Construire la fonction limite

4

Pour x fixé,

$$T_{N+1}(x) - T_N(x) = f_N(x) \geq 0,$$

donc $(T_N(x))$ est croissante. De plus,

$$T_N(x) \leq \sum_{n=0}^{N-1} 2^{-n-1} = 1 - 2^{-N} < 1.$$

La suite est croissante et majorée ; elle converge. On peut donc définir

$$T(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N(x).$$

5

(a) Si $M > N$,

$$T_M(x) - T_N(x) = \sum_{n=N}^{M-1} f_n(x).$$

(b) Les termes $f_n(x)$ sont positifs et $f_n(x) \leq 2^{-n-1}$, donc

$$0 \leq T_M(x) - T_N(x) \leq \sum_{n=N}^{M-1} 2^{-n-1}.$$

La somme géométrique finie vaut

$$\sum_{n=N}^{M-1} 2^{-n-1} = 2^{-N} (1 - 2^{-(M-N)}) \leq 2^{-N}.$$

(c) Pour N fixé, l'encadrement précédent vaut pour tout $M > N$. Comme $T_M(x) \rightarrow T(x)$,

$$0 \leq T(x) - T_N(x) \leq 2^{-N}.$$

Cette estimation est valable pour tout réel x .

6

(a) Comme 2^n est un entier et φ est 1-périodique,

$$\begin{aligned} f_n(x+1) &= 2^{-n} \varphi(2^n(x+1)) \\ &= 2^{-n} \varphi(2^n x + 2^n) \\ &= 2^{-n} \varphi(2^n x) = f_n(x). \end{aligned}$$

Chaque f_n est donc 1-périodique.

(b) Une somme finie de fonctions 1-périodiques est 1-périodique, donc

$$T_N(x+1) = T_N(x).$$

(c) Pour tout x , les suites $(T_N(x+1))$ et $(T_N(x))$ sont égales terme à terme. Elles ont donc la même limite :

$$T(x+1) = T(x).$$

Ainsi T est 1-périodique.

III Montrer que la fonction limite est continue

7

On écrit

$$T_N(x) - T_N(y) = \sum_{n=0}^{N-1} (f_n(x) - f_n(y)).$$

L'inégalité triangulaire et la question 3 donnent

$$\begin{aligned} |T_N(x) - T_N(y)| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |x - y| \\ &= N|x - y|. \end{aligned}$$

8 —

(a) On ajoute puis retranche $T_N(x)$ et $T_N(y)$:

$$T(x) - T(y) = (T(x) - T_N(x)) + (T_N(x) - T_N(y)) + (T_N(y) - T(y)).$$

(b) Par l'inégalité triangulaire, puis les questions 5 et 7,

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &\leq |T(x) - T_N(x)| + |T_N(x) - T_N(y)| + |T_N(y) - T(y)| \\ &\leq 2^{-N} + N|x - y| + 2^{-N}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$|T(x) - T(y)| \leq 2^{1-N} + N|x - y|.$$

Le sujet fournit ensuite la formulation quantifiée de la continuité. Elle est équivalente à l'écriture de Terminale $\lim_{y \rightarrow x} T(y) = T(x)$, mais elle rend l'estimation précédente directement exploitable. Intuitivement, ε fixe la précision souhaitée sur les valeurs de la fonction et δ indique à quel point il faut rapprocher y de x pour garantir cette précision. Le point essentiel est de choisir d'abord N pour rendre le terme 2^{1-N} petit, puis de choisir δ pour contrôler $N|x - y|$.

9 —

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

(a) Comme

$$2^{1-N} \longrightarrow 0,$$

il existe $N \geq 1$ tel que

$$2^{1-N} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) Pour ce N , prenons par exemple

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2N} > 0.$$

Alors $N\delta = \varepsilon/2$.

(c) Si $|x - y| < \delta$, la question 8 donne

$$|T(x) - T(y)| \leq 2^{1-N} + N|x - y| < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta = \varepsilon.$$

Nous avons donc établi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \implies |T(x) - T(y)| < \varepsilon.$$

La fonction T est continue en x . Comme x était quelconque,

T est continue sur $\mathbb{R}$.

IV Une grille pour lire les pentes

On rappelle qu'un nombre dyadique est un réel de la forme $k/2^m$ et que

$$\mathcal{G}_N = \left\{ \frac{k}{2^N}; k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad I_{N,k} = \left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N} \right].$$

10

Posons

$$a = \frac{k}{2^N}, \quad b = \frac{k+1}{2^N}.$$

Si $n \geq N$,

$$2^n a = k 2^{n-N} \in \mathbb{Z}, \quad 2^n b = (k+1) 2^{n-N} \in \mathbb{Z}.$$

Or $\varphi(q) = 0$ pour tout entier q . Donc

$$f_n(a) = f_n(b) = 0.$$

11

(a) La fonction φ change de pente aux entiers et aux demi-entiers, c'est-à-dire aux nombres $j/2$, $j \in \mathbb{Z}$. Ainsi $f_n(x) = 2^{-n}\varphi(2^n x)$ change de pente lorsque

$$2^n x = \frac{j}{2},$$

soit

$$x = \frac{j}{2^{n+1}}.$$

(b) Si $n < N$,

$$\frac{j}{2^{n+1}} = \frac{j 2^{N-n-1}}{2^N} \in \mathcal{G}_N.$$

L'intervalle ouvert

$$\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N} \right)$$

ne contient aucun point de $\mathcal{G}_N$. Il n'y a donc aucun changement de pente de f_n dans cet intervalle.

(c) La restriction de f_n à $I_{N,k}$ est affine. Sur un intervalle où φ a pente $+1$ ou -1 , la fonction $x \mapsto \varphi(2^n x)$ a pente $\pm 2^n$, puis le facteur 2^{-n} ramène cette pente à

$$2^{-n}(\pm 2^n) = \pm 1.$$

12

(a) Pour $n < N$, notons $\varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ la pente de f_n sur $I_{N,k}$.

(b) Pour $n < N$,

$$f_n(b) - f_n(a) = \varepsilon_n(b - a).$$

Pour $n \geq N$, la question 10 donne $f_n(a) = f_n(b) = 0$. Les valeurs aux deux extrémités sont donc déjà stabilisées à partir de T_N :

$$T(a) = T_N(a), \quad T(b) = T_N(b).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} T(b) - T(a) &= \sum_{n=0}^{N-1} (f_n(b) - f_n(a)) \\ &= (b - a) \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_n. \end{aligned}$$

En divisant par $b - a$,

$$\sigma_{N,k} = \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{N-1}.$$

V Zoom autour d'un point non dyadique

13

(a) Comme

$$a_N < x < b_N, \quad b_N - a_N = 2^{-N},$$

on a

$$0 < x - a_N < 2^{-N}, \quad 0 < b_N - x < 2^{-N}.$$

Puisque $2^{-N} \rightarrow 0$,

$$a_N \rightarrow x, \quad b_N \rightarrow x.$$

(b) La grille $\mathcal{G}_{N+1}$ s'obtient en ajoutant le milieu de chaque intervalle délimité par deux points consécutifs de $\mathcal{G}_N$. Comme x n'est jamais un point de la grille, l'intervalle I_{N+1} qui contient x est l'une des deux moitiés de I_N .

Pour $f_0, \dots, f_{N-1}$, les pentes sur I_{N+1} sont les mêmes que sur I_N . Un seul nouveau terme apparaît dans la formule de la question 12 : f_N , dont la pente vaut $+1$ ou -1 . Ainsi

$$s_{N+1} = s_N \pm 1,$$

d'où

$$s_{N+1} - s_N \in \{-1, +1\}.$$

(c) Si (s_N) convergait vers un réel ℓ , alors (s_{N+1}) convergerait aussi vers ℓ , et

$$s_{N+1} - s_N \longrightarrow 0.$$

C'est impossible puisque

$$|s_{N+1} - s_N| = 1$$

pour tout N . Donc (s_N) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

14

Soit g dérivable en x .

(a) On a

$$u_N = \frac{g(x) - g(a_N)}{x - a_N} = \frac{g(a_N) - g(x)}{a_N - x}.$$

Comme $a_N \rightarrow x$,

$$u_N \rightarrow g'(x).$$

De même,

$$v_N = \frac{g(b_N) - g(x)}{b_N - x} \rightarrow g'(x).$$

(b) Les quantités $x - a_N$ et $b_N - x$ sont positives, donc $\alpha_N, \beta_N \geq 0$. De plus,

$$\alpha_N + \beta_N = \frac{x - a_N + b_N - x}{b_N - a_N} = 1.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \alpha_N u_N + \beta_N v_N &= \frac{x - a_N}{b_N - a_N} \frac{g(x) - g(a_N)}{x - a_N} \\ &\quad + \frac{b_N - x}{b_N - a_N} \frac{g(b_N) - g(x)}{b_N - x} \\ &= \frac{g(b_N) - g(a_N)}{b_N - a_N}. \end{aligned}$$

(c) Posons $L = g'(x)$. Comme $\alpha_N + \beta_N = 1$,

$$\begin{aligned} |\alpha_N u_N + \beta_N v_N - L| &= |\alpha_N(u_N - L) + \beta_N(v_N - L)| \\ &\leq \alpha_N |u_N - L| + \beta_N |v_N - L| \\ &\leq (\alpha_N + \beta_N) \max(|u_N - L|, |v_N - L|) \\ &= \max(|u_N - L|, |v_N - L|). \end{aligned}$$

(d) D'après (a), les deux quantités $|u_N - L|$ et $|v_N - L|$ tendent vers 0. Leur maximum tend donc vers 0. D'après (b) et (c),

$$\left| \frac{g(b_N) - g(a_N)}{b_N - a_N} - g'(x) \right| \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$\frac{g(b_N) - g(a_N)}{b_N - a_N} \longrightarrow g'(x).$$

15 _____

Supposons T dérivable en un réel non dyadique x . La question 13 donne

$$a_N \rightarrow x, \quad b_N \rightarrow x,$$

mais la suite

$$s_N = \frac{T(b_N) - T(a_N)}{b_N - a_N}$$

ne converge pas. La question 14, appliquée à $g = T$, imposerait pourtant

$$s_N \rightarrow T'(x).$$

Contradiction. Ainsi T n'est dérivable en aucun réel non dyadique.

VI Zoom autour d'un point dyadique

Un nombre dyadique appartient, à partir d'un certain rang, à toutes les grilles $\mathcal{G}_N$; il faut donc traiter ce cas séparément.

16 _____

Soit $x = k/2^m$ avec $m \geq 1$ et

$$J_N = [x, x + 2^{-N}], \quad N \geq m.$$

(a) Si $n \geq m$,

$$2^n x = k 2^{n-m} \in \mathbb{Z}.$$

Pour $t \in J_N$ et $m \leq n < N$,

$$0 \leq t - x \leq 2^{-N},$$

donc

$$0 \leq 2^n(t - x) \leq 2^{n-N} \leq \frac{1}{2}.$$

Posons $u = 2^n(t - x)$. La périodicité de φ et la formule $\varphi(u) = u$ sur $[0, 1/2]$ donnent

$$\varphi(2^n t) = \varphi(2^n x + u) = \varphi(u) = u.$$

Ainsi

$$f_n(t) = 2^{-n}u = t - x.$$

La fonction f_n est donc affine de pente $+1$ sur J_N .

(b) Comme $x = k/2^m$,

$$J_m = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right] = I_{m,k}.$$

Pour $n < m$, la question 11 montre que f_n est affine sur J_m , donc sur chaque $J_N \subset J_m$. Sa pente $c_n \in \{-1, +1\}$ ne dépend pas de N ; il en est de même de

$$C = c_0 + \cdots + c_{m-1}.$$

17

(a) Les extrémités de J_N sont deux points consécutifs de $\mathcal{G}_N$:

$$x = \frac{k2^{N-m}}{2^N}, \quad x + 2^{-N} = \frac{k2^{N-m} + 1}{2^N}.$$

La question 10 donne donc, pour tout $n \geq N$,

$$f_n(x) = f_n(x + 2^{-N}) = 0.$$

(b) Les fonctions $f_0, \dots, f_{m-1}$ apportent ensemble la pente C . Les $N - m$ fonctions

$$f_m, f_{m+1}, \dots, f_{N-1}$$

ont chacune, d'après la question 16, la pente $+1$ sur J_N . Les termes de rang $n \geq N$ ont la même valeur aux deux extrémités. La pente de la corde vaut donc

$$\boxed{C + (N - m)}.$$

(c) Comme C et m sont fixes,

$$C + (N - m) \longrightarrow +\infty.$$

Or cette quantité est exactement

$$\frac{T(x + 2^{-N}) - T(x)}{2^{-N}}.$$

Si T était dérivable en x , ces taux d'accroissement devraient tendre vers le réel $T'(x)$ lorsque $2^{-N} \rightarrow 0$. Ils tendent au contraire vers $+\infty$. Donc T n'est pas dérivable en x .

18

La question 9 montre que T est continue sur $\mathbb{R}$. La question 15 exclut toute dérivabilité aux points non dyadiques, et la question 17 l'exclut aux points dyadiques. Par conséquent,

$$\boxed{T \text{ est continue en tout réel et n'est dérivable en aucun réel.}}$$

La fonction T ainsi construite est appelée **fonction de Takagi**.

IDÉE Le contre-exemple repose sur deux échelles différentes. Verticalement, les nouvelles dents ont une hauteur au plus 2^{-n-1} , si bien que leur effet sur la valeur de la fonction devient minuscule. Mais leurs pentes valent toujours ± 1 : lorsque l'on zoome, la direction locale continue donc de changer au lieu de se stabiliser.

SOURCES

Jeffrey C. Lagarias — The Takagi function and its properties. [Lien direct](#)