

DM n°05 — Une fonction continue partout et dérivable nulle part

Une fonction dérivable est toujours continue. La réciproque est fautive : peut-elle échouer au point qu'une fonction soit continue partout mais dérivable nulle part ? Nous allons construire un tel contre-exemple. L'idée est de superposer des dents triangulaires de plus en plus petites : leurs hauteurs disparaissent, mais pas leurs pentes.

I Une dent triangulaire

On définit $\varphi(x)$ comme la distance de x à l'entier le plus proche :

$$\varphi(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|.$$

- 1 (a) Montrer que, pour tout réel x ,

$$\varphi(x + 1) = \varphi(x).$$

IDÉE Dans le minimum qui définit $\varphi(x + 1)$, introduire $j = k - 1$ et remarquer que j parcourt encore tous les entiers.

- (b) Pour $x \in [0, 1]$, montrer que le minimum qui définit $\varphi(x)$ est atteint pour l'un des entiers 0 ou 1. En déduire

$$\varphi(x) = \min(x, 1 - x).$$

- (c) En déduire que

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis tracer l'allure de φ sur $[-1, 2]$.

- 2 Montrer que, pour tous réels x, y ,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|.$$

IDÉE Choisir un entier p tel que $\varphi(y) = |y - p|$, utiliser l'inégalité triangulaire, puis échanger les rôles de x et y .

- 3 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n(x) = 2^{-n} \varphi(2^n x).$$

Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq f_n(x) \leq 2^{-n-1} \quad \text{et} \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|.$$

II Construire la fonction limite

Pour $N \geq 1$, on additionne les N premières dents et on pose

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x).$$

- 4 Pour x fixé, montrer que la suite $(T_N(x))_{N \geq 1}$ est croissante et majorée. En déduire qu'elle converge. On note

$$T(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N(x).$$

- 5 (a) Soient $M > N \geq 1$. Écrire $T_M(x) - T_N(x)$ sous la forme d'une somme portant sur les indices $n = N, \dots, M-1$.
 (b) À l'aide de la question 3, montrer que

$$0 \leq T_M(x) - T_N(x) \leq \sum_{n=N}^{M-1} 2^{-n-1} \leq 2^{-N}.$$

- (c) En déduire que, pour tout $N \geq 1$,

$$0 \leq T(x) - T_N(x) \leq 2^{-N}.$$

- 6 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est 1-périodique.
 (b) En déduire que chaque T_N est 1-périodique.
 (c) Montrer que T est 1-périodique.

III Montrer que la fonction limite est continue

Pour chaque réel x , la valeur $T(x)$ est définie comme la limite des valeurs $T_N(x)$. Nous allons comparer $T(x)$ et $T(y)$ en nous appuyant sur une approximation T_N .

- 7 Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $N \geq 1$,

$$|T_N(x) - T_N(y)| \leq N|x - y|.$$

IDÉE Développer $T_N(x) - T_N(y)$ puis utiliser l'inégalité triangulaire et la question 3.

- 8 (a) Écrire $T(x) - T(y)$ en faisant apparaître successivement $T_N(x)$ puis $T_N(y)$.
 (b) En utilisant l'inégalité triangulaire, la question 5 et la question 7, montrer que

$$|T(x) - T(y)| \leq 2^{1-N} + N|x - y|.$$

En Terminale, la continuité de T en un réel x s'exprime par

$$\lim_{y \rightarrow x} T(y) = T(x).$$

Pour les fonctions usuelles, les règles de calcul sur les limites permettent souvent de vérifier directement cette égalité. L'estimation de la question 7 montre notamment que chaque T_N est continue. Mais ici, T est elle-même définie comme la limite de la suite de fonctions (T_N) : la continuité de chacune des approximations ne permet pas, à elle seule, de conclure automatiquement que leur limite T est continue. Pour exploiter l'estimation obtenue à la question 8, nous utiliserons une formulation plus précise de la même notion de limite, généralement formalisée dans l'enseignement supérieur et donnée ici :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \implies |T(x) - T(y)| < \varepsilon.}$$

Autrement dit, on doit pouvoir rendre $T(y)$ aussi proche que l'on veut de $T(x)$ en choisissant y suffisamment proche de x : ε fixe la précision souhaitée sur les valeurs de la fonction, tandis que δ indique à quel point il faut rapprocher y de x .

La question suivante consiste à établir exactement cette propriété.

9 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

(a) Expliquer pourquoi on peut choisir un entier $N \geq 1$ tel que

$$2^{1-N} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(b) Pour cet entier N , donner un choix de $\delta > 0$ tel que

$$N\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) Pour ces choix de N et δ , montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| < \delta \implies |T(x) - T(y)| < \varepsilon.$$

Conclure que T est continue en x , puis sur $\mathbb{R}$.

IV Une grille pour lire les pentes

On appelle **nombre dyadique** tout réel qui peut s'écrire $k/2^m$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$. Pour $N \geq 1$, on note

$$\mathcal{G}_N = \left\{ \frac{k}{2^N} ; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Deux points consécutifs de cette grille délimitent l'intervalle

$$I_{N,k} = \left[\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N} \right].$$

10 Soient

$$a = \frac{k}{2^N}, \quad b = \frac{k+1}{2^N}.$$

Montrer que

$$f_n(a) = f_n(b) = 0$$

pour tout $n \geq N$.

- 11 (a) Montrer que les changements de pente de f_n ont lieu aux points de la forme

$$\frac{j}{2^{n+1}}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

- (b) Si $n < N$, montrer que tous ces points appartiennent à $\mathcal{G}_N$. En déduire qu'aucun changement de pente de f_n ne se trouve dans l'intervalle ouvert

$$\left(\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N} \right).$$

- (c) Montrer alors que f_n est affine sur $I_{N,k}$ et que sa pente vaut $+1$ ou -1 .

- 12 On reprend

$$a = \frac{k}{2^N}, \quad b = \frac{k+1}{2^N},$$

et on note $\sigma_{N,k}$ la pente de la corde joignant les points $(a, T(a))$ et $(b, T(b))$.

- (a) Pour $n < N$, noter $\varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ la pente de f_n sur $I_{N,k}$.

- (b) En utilisant aussi la question 10, montrer que

$$\sigma_{N,k} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{N-1}.$$

V Zoom autour d'un point non dyadique

Soit x un réel non dyadique. Pour chaque $N \geq 1$, il existe un unique entier k_N tel que

$$\frac{k_N}{2^N} < x < \frac{k_N + 1}{2^N}.$$

On pose

$$a_N = \frac{k_N}{2^N}, \quad b_N = \frac{k_N + 1}{2^N}, \quad I_N = [a_N, b_N],$$

et on note s_N la pente de la corde de T entre a_N et b_N .

- 13 (a) Montrer que

$$a_N \longrightarrow x \quad \text{et} \quad b_N \longrightarrow x.$$

- (b) Montrer que I_{N+1} est l'une des deux moitiés de I_N . À l'aide de la question 12, montrer que

$$s_{N+1} - s_N \in \{-1, +1\}.$$

- (c) En déduire que la suite (s_N) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

- 14 Soit g une fonction dérivable en x . On considère deux suites (a_N) et (b_N) telles que

$$a_N < x < b_N, \quad a_N \rightarrow x, \quad b_N \rightarrow x.$$

- (a) Pour tout N , on définit

$$u_N = \frac{g(x) - g(a_N)}{x - a_N}, \quad v_N = \frac{g(b_N) - g(x)}{b_N - x}.$$

Déterminer les limites de (u_N) et (v_N) .

(b) Pour tout N , on définit

$$\alpha_N = \frac{x - a_N}{b_N - a_N}, \quad \beta_N = \frac{b_N - x}{b_N - a_N}.$$

Montrer que $\alpha_N, \beta_N \geq 0$, que $\alpha_N + \beta_N = 1$, puis que

$$\frac{g(b_N) - g(a_N)}{b_N - a_N} = \alpha_N u_N + \beta_N v_N.$$

(c) On note $L = g'(x)$. Montrer que

$$|\alpha_N u_N + \beta_N v_N - L| \leq \alpha_N |u_N - L| + \beta_N |v_N - L| \leq \max(|u_N - L|, |v_N - L|).$$

(d) En déduire que

$$\frac{g(b_N) - g(a_N)}{b_N - a_N} \longrightarrow g'(x).$$

- 15 Supposer que T est dérivable en un réel non dyadique x . Comparer les conclusions des questions 13 et 14 et obtenir une contradiction.

VI Zoom autour d'un point dyadique

Un nombre dyadique appartient, à partir d'un certain rang, à toutes les grilles $\mathcal{G}_N$. Il doit donc être étudié séparément.

- 16 Soit

$$x = \frac{k}{2^m}, \quad m \geq 1,$$

une telle écriture étant toujours possible pour un nombre dyadique. Pour $N \geq m$, on considère

$$J_N = [x, x + 2^{-N}].$$

(a) Soient $m \leq n < N$ et $t \in J_N$. Montrer que $2^n x$ est entier et que

$$0 \leq 2^n(t - x) \leq \frac{1}{2}.$$

En déduire que f_n est affine de pente $+1$ sur J_N .

(b) Vérifier que $J_m = I_{m,k}$. Pour $n < m$, utiliser la question 11 pour justifier que f_n est affine sur J_m . On note $c_n \in \{-1, +1\}$ sa pente et on définit

$$C = c_0 + \cdots + c_{m-1}.$$

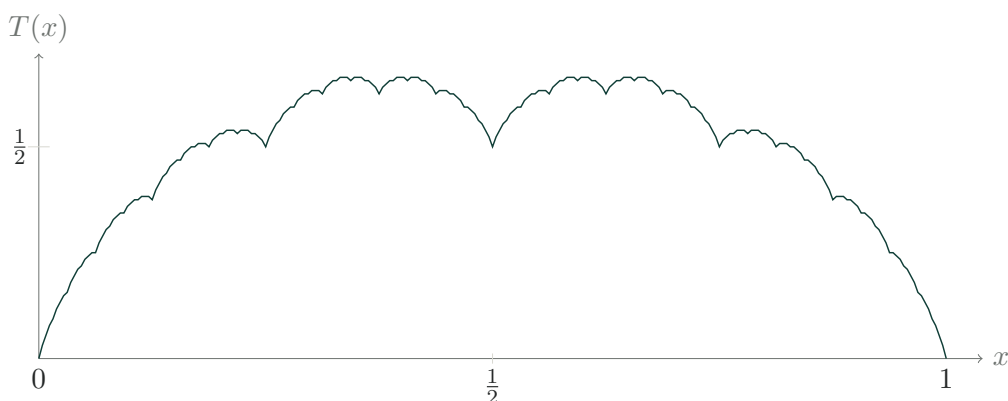
Expliquer pourquoi C ne dépend pas de N .

- 17 (a) Montrer que les fonctions f_n avec $n \geq N$ prennent la valeur 0 aux deux extrémités de J_N .
- (b) En déduire que la pente de la corde de T sur J_N vaut

$$C + (N - m).$$

- (c) Déterminer le comportement de cette pente lorsque $N \rightarrow +\infty$. Expliquer pourquoi T ne peut pas être dérivable en x .
- 18 Énoncer précisément le résultat obtenu pour la fonction T .

IDÉE Les hauteurs des nouvelles dents sont de l'ordre de 2^{-n} : elles deviennent donc négligeables. Leurs pentes, elles, restent égales à $+1$ ou -1 . C'est cette opposition qui permet à la courbe de rester continue tout en empêchant toute tangente de se stabiliser.



Représentation de T sur $[0, 1]$ obtenue en traçant T_8 . D'après la question 5, l'écart vertical entre T et T_8 est au plus $2^{-8} = 1/256$.