

CORRIGÉ

Terminale · spécialité maths · CORRIGÉ

CHAPITRES

DM n°06 — Fourier et principe d'incertitude : une porte vers Heisenberg

Dénombrement · Sommes finies ·
Calcul algébrique · Inégalités

I Des suites binaires aux motifs de signes

1

(a) L'ensemble $E_2 = \{0, 1\}^2$ est formé de tous les couples dont chaque coordonnée vaut 0 ou 1 :

$$E_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

(b) Pour $x = (x_1, x_2)$:

- si $a = (0, 0)$, alors $\varepsilon_a(x) = 1$;
- si $a = (1, 0)$, alors $\varepsilon_a(x) = (-1)^{x_1}$;
- si $a = (0, 1)$, alors $\varepsilon_a(x) = (-1)^{x_2}$;
- si $a = (1, 1)$, alors $\varepsilon_a(x) = (-1)^{x_1+x_2}$.

(c) Dans l'ordre $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ pour les valeurs de x , on obtient :

a	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$\varepsilon_a(x)$ lorsque x parcourt E_2	$(1, 1, 1, 1)$	$(1, -1, 1, -1)$	$(1, 1, -1, -1)$	$(1, -1, -1, 1)$

Ces quatre motifs montrent déjà deux propriétés qui seront essentielles : leurs valeurs sont toujours -1 ou 1 , et deux motifs distincts présentent autant d'accords que de désaccords.

2

(a) Pour construire un mot de longueur m , chacune des m coordonnées peut être choisie indépendamment parmi deux valeurs, 0 ou 1. Le nombre total de mots est donc

$$2 \times \cdots \times 2 = 2^m.$$

(b) L'exposant

$$a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$$

est un entier. Toute puissance entière de -1 vaut -1 ou 1 . Ainsi

$$\varepsilon_a(x) \in \{-1, 1\},$$

et, dans les deux cas,

$$\varepsilon_a(x)^2 = 1.$$

(c) Si l'on change seulement x_k , l'exposant varie seulement par l'intermédiaire du terme $a_k x_k$.

Si $a_k = 0$, ce terme vaut toujours 0 : le signe ne change pas.

Si $a_k = 1$, remplacer x_k par $1 - x_k$ change la parité de l'exposant. La puissance de -1 est donc multipliée par -1 : $\varepsilon_a(x)$ change de signe.

II Une annulation par appariement

3

(a) Pour tout $a \in E_m$,

$$\varepsilon_a(x)^2 = 1.$$

Comme E_m contient 2^m mots,

$$C(x, x) = \sum_{a \in E_m} 1 = 2^m.$$

(b) Les mots a et a^* ne diffèrent qu'à la coordonnée k . Comme $x_k \neq y_k$ et que ces deux chiffres appartiennent à $\{0, 1\}$, on a $x_k + y_k = 1$.

Dans le produit

$$\varepsilon_a(x)\varepsilon_a(y) = (-1)^{a_1(x_1+y_1)+\dots+a_m(x_m+y_m)},$$

remplacer $a_k = 0$ par $a_k^* = 1$ ajoute donc exactement 1 à l'exposant. Par conséquent,

$$\varepsilon_{a^*}(x)\varepsilon_{a^*}(y) = -\varepsilon_a(x)\varepsilon_a(y).$$

(c) Chaque mot dont le k -ième chiffre vaut 0 est associé à un unique mot dont ce chiffre vaut 1, et réciproquement. Ces paires sont disjointes et recouvrent tout E_m .

D'après (b), les deux termes correspondant à une même paire sont opposés. Ils s'annulent donc dans la somme, d'où

$$C(x, y) = 0 \quad \text{si } x \neq y.$$

Avec le cas $x = y$ obtenu en (a),

$$\sum_{a \in E_m} \varepsilon_a(x)\varepsilon_a(y) = \begin{cases} 2^m, & \text{si } x = y, \\ 0, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

4

(a) On a

$$\varepsilon_a(x) = (-1)^{a_1 x_1 + \dots + a_m x_m}.$$

Comme $a_i x_i = x_i a_i$ pour chaque i ,

$$\varepsilon_a(x) = (-1)^{x_1 a_1 + \dots + x_m a_m} = \varepsilon_x(a).$$

(b) Grâce à la symétrie précédente,

$$\varepsilon_a(x) \varepsilon_b(x) = \varepsilon_x(a) \varepsilon_x(b).$$

La relation obtenue à la question 3, appliquée aux mots a et b , donne donc

$$\sum_{x \in E_m} \varepsilon_a(x) \varepsilon_b(x) = \begin{cases} 2^m, & \text{si } a = b, \\ 0, & \text{si } a \neq b. \end{cases} \quad (1)$$

Éclairage. En Première, dans un repère orthonormé, le produit scalaire de deux vecteurs de coordonnées (u_1, u_2) et (v_1, v_2) vaut $u_1 v_1 + u_2 v_2$; il est nul lorsque les vecteurs sont orthogonaux. Si l'on ordonne les mots de E_m , chaque fonction ε_a fournit une liste de 2^m coordonnées, et le membre de gauche de (1) est exactement la somme des produits des coordonnées correspondantes de deux telles listes. La relation (1) est donc la même idée de produit scalaire, étendue à des listes plus longues : deux motifs distincts sont orthogonaux. Cette généralisation sera systématisée plus tard en algèbre linéaire et en analyse.

III Détecter les motifs et reconstruire une fonction

5

(a) Si $f = \varepsilon_b$, alors

$$\widehat{f}(a) = \sum_{x \in E_m} \varepsilon_b(x) \varepsilon_a(x).$$

D'après (1),

$$\widehat{f}(a) = \begin{cases} 2^m, & \text{si } a = b, \\ 0, & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

La transformation reconnaît donc parfaitement un motif élémentaire : un seul coefficient est non nul.

(b) La fonction g est nulle partout sauf en y , où elle vaut 1. Ainsi

$$\widehat{g}(a) = \sum_{x \in E_m} g(x) \varepsilon_a(x) = \varepsilon_a(y).$$

Donc

$$\widehat{g}(a) = \varepsilon_a(y).$$

Tous les coefficients valent -1 ou 1 ; en particulier, aucun n'est nul. Une fonction concentrée en un seul mot donne ici une transformée totalement étalée.

6

(a) En utilisant la définition (2),

$$\begin{aligned} R(y) &= \frac{1}{2^m} \sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a) \varepsilon_a(y) \\ &= \frac{1}{2^m} \sum_{a \in E_m} \left(\sum_{x \in E_m} f(x) \varepsilon_a(x) \right) \varepsilon_a(y). \end{aligned}$$

En développant la somme extérieure,

$$R(y) = \frac{1}{2^m} \sum_{a \in E_m} \sum_{x \in E_m} f(x) \varepsilon_a(x) \varepsilon_a(y).$$

(b) Les deux ensembles d'indices sont finis : les mêmes $2^m \times 2^m$ termes peuvent donc être additionnés dans l'autre ordre. On obtient

$$R(y) = \frac{1}{2^m} \sum_{x \in E_m} f(x) \left(\sum_{a \in E_m} \varepsilon_a(x) \varepsilon_a(y) \right).$$

(c) D'après la question 3, la somme intérieure vaut 0 lorsque $x \neq y$ et 2^m lorsque $x = y$. Tous les termes disparaissent donc sauf celui correspondant à $x = y$:

$$R(y) = \frac{1}{2^m} f(y) 2^m = f(y).$$

Ainsi

$$\boxed{f(y) = \frac{1}{2^m} \sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a) \varepsilon_a(y).} \quad (3)$$

Éclairage. La transformation ne perd donc aucune information : à partir de tous les coefficients $\widehat{f}(a)$, la formule précédente redonne exactement chaque valeur de f .

IV Une quantité globale qui traverse la transformation

7

(a) Pour chaque a ,

$$\widehat{f}(a)^2 = \widehat{f}(a) \sum_{x \in E_m} f(x) \varepsilon_a(x).$$

En sommant sur a ,

$$\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 = \sum_{a \in E_m} \sum_{x \in E_m} \widehat{f}(a) f(x) \varepsilon_a(x).$$

Les sommes étant finies, on peut regrouper les termes suivant x :

$$\boxed{\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 = \sum_{x \in E_m} f(x) \left(\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a) \varepsilon_a(x) \right).}$$

(b) La formule de reconstruction (3), appliquée à x , donne

$$\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a) \varepsilon_a(x) = 2^m f(x).$$

En remplaçant dans l'égalité précédente,

$$\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 = \sum_{x \in E_m} f(x) 2^m f(x),$$

d'où

$$\boxed{\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 = 2^m \sum_{x \in E_m} f(x)^2.} \quad (4)$$

C'est l'identité de Parseval dans la normalisation choisie ici.

V Une inégalité élémentaire

8

(a) Développons d'abord le membre de droite. Dans la somme des $(u_i - u_j)^2$, chaque terme u_i^2 apparaît une fois pour chacun des $q - 1$ autres indices. Ainsi

$$\sum_{1 \leq i < j \leq q} (u_i - u_j)^2 = (q - 1) \sum_{i=1}^q u_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq q} u_i u_j.$$

D'autre part,

$$\left(\sum_{i=1}^q u_i \right)^2 = \sum_{i=1}^q u_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq q} u_i u_j.$$

Par conséquent,

$$q \sum_{i=1}^q u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^q u_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq q} (u_i - u_j)^2.$$

(b) Le membre de droite est une somme de carrés, donc il est positif ou nul. Ainsi

$$q \sum_{i=1}^q u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^q u_i \right)^2 \geq 0,$$

d'où

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^q u_i \right)^2 \leq q \sum_{i=1}^q u_i^2.} \quad (6)$$

VI Peut-on concentrer les deux descriptions ?

9

(a) Par définition du support, $f(x) = 0$ pour $x \notin S$. Les termes correspondants ne contribuent donc pas à la somme :

$$\widehat{f}(a) = \sum_{x \in E_m} f(x) \varepsilon_a(x) = \sum_{x \in S} f(x) \varepsilon_a(x).$$

(b) Comme S contient s éléments, écrivons

$$S = \{x^{(1)}, \dots, x^{(s)}\}.$$

Appliquons (6) aux s nombres

$$u_i = f(x^{(i)}) \varepsilon_a(x^{(i)}).$$

On obtient

$$\widehat{f}(a)^2 \leq s \sum_{x \in S} f(x)^2 \varepsilon_a(x)^2.$$

Or $\varepsilon_a(x)^2 = 1$, donc

$$\widehat{f}(a)^2 \leq s \sum_{x \in S} f(x)^2.$$

Les termes $f(x)^2$ sont nuls hors de S , donc

$$\boxed{\widehat{f}(a)^2 \leq s \sum_{x \in E_m} f(x)^2.} \quad (7)$$

10

(a) Seuls les t mots de T donnent des coefficients non nuls. Ainsi

$$\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 = \sum_{a \in T} \widehat{f}(a)^2.$$

Pour chacun des t indices $a \in T$, l'inégalité (7) donne la même majoration. En sommant ces t inégalités,

$$\boxed{\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 \leq st \sum_{x \in E_m} f(x)^2.}$$

(b) Parseval donne aussi

$$\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 = 2^m \sum_{x \in E_m} f(x)^2.$$

Par conséquent,

$$2^m \sum_{x \in E_m} f(x)^2 \leq st \sum_{x \in E_m} f(x)^2.$$

La fonction f n'est pas nulle : au moins un des nombres $f(x)^2$ est strictement positif, donc

$$\sum_{x \in E_m} f(x)^2 > 0.$$

On peut diviser par cette quantité et obtenir $2^m \leq st$. Ainsi

$$|\text{supp } f| |\text{supp } \widehat{f}| \geq 2^m. \quad (8)$$

Cette forme permet déjà de préciser le sens de la double localisation. Comme $s > 0$,

$$t \geq \frac{2^m}{s}.$$

Si s devient petit, la borne imposée à t devient grande. Par exemple, si $s = 1$, alors $t \geq 2^m$; or $T \subset E_m$ et $|E_m| = 2^m$, donc nécessairement $t = 2^m$. Une fonction non nulle en un seul mot a donc une transformée non nulle partout. La relation est symétrique : si t est très petit, alors s doit être grand.

11

(a) Les r premières coordonnées de x sont imposées et valent 0. Les $m - r$ autres sont libres, avec deux choix chacune. Ainsi

$$|\text{supp } f_r| = 2^{m-r}.$$

(b) Supposons qu'il existe j tel que $r < j \leq m$ et $a_j = 1$. Dans la somme qui définit $\widehat{f}_r(a)$, seuls les mots du support de f_r interviennent. Comme $j > r$, changer la coordonnée x_j laisse un mot dans ce support.

Associés à chaque mot x du support le mot x^* obtenu en remplaçant x_j par $1 - x_j$. Les mots x et x^* forment des paires. Comme $a_j = 1$,

$$\varepsilon_a(x^*) = -\varepsilon_a(x).$$

De plus, $f_r(x) = f_r(x^*) = 1$. Les deux contributions d'une même paire s'annulent, donc

$$\widehat{f}_r(a) = 0.$$

(c) Supposons maintenant que $a_j = 0$ pour tout j tel que $r < j \leq m$. Pour tout x du support de f_r , on a $x_1 = \dots = x_r = 0$. Les termes de l'exposant correspondant aux indices $1, \dots, r$ sont donc nuls, et ceux correspondant aux indices $j > r$ sont également nuls puisque $a_j = 0$. Ainsi

$$a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = 0,$$

et chaque terme $\varepsilon_a(x)$ vaut 1. Comme le support contient 2^{m-r} mots,

$$\widehat{f}_r(a) = 2^{m-r}.$$

La transformée est donc non nulle exactement pour les mots a dont toutes les coordonnées d'indice $j > r$ sont nulles. Les r premières coordonnées sont libres, d'où

$$|\text{supp } \widehat{f}_r| = 2^r.$$

Finalement,

$$|\text{supp } f_r| |\text{supp } \widehat{f}_r| = 2^{m-r} 2^r = 2^m.$$

La borne du principe d'incertitude est donc exacte pour tout $r \in \{0, \dots, m\}$, y compris aux deux extrémités : pour $r = 0$, f_0 vaut 1 partout et sa transformée n'est non nulle qu'en un mot ; pour $r = m$, f_m n'est non nulle qu'au mot $(0, \dots, 0)$ et sa transformée est non nulle partout.

Synthèse. Les motifs de signes s'annulent deux à deux, cette orthogonalité permet de reconstruire une fonction à partir de ses coefficients de Walsh-Fourier, puis Parseval contrôle la somme de leurs carrés. L'inégalité élémentaire de la question 8 transforme enfin ce contrôle global en une contrainte sur les nombres de valeurs non nulles. La famille f_r montre que cette contrainte est optimale.

Ouverture. La transformée de Walsh-Fourier est une forme d'analyse de Fourier adaptée aux données binaires. Dans la théorie de Fourier classique, les motifs élémentaires sont des oscillations sinusoïdales ou des exponentielles complexes ; ici, ils se réduisent aux signes -1 et 1 . Les mêmes idées structurantes réapparaissent : orthogonalité, reconstruction, Parseval et impossibilité d'une double localisation arbitrairement forte.

L'inégalité obtenue ici rend cette dernière phrase quantitative. En notant $s = |\text{supp } f|$ et $t = |\text{supp } \hat{f}|$,

$$st \geq 2^m \quad \implies \quad t \geq \frac{2^m}{s}.$$

Plus f est concentrée sur peu de mots, plus sa transformée doit être étalée. Si $s = 1$, alors $t = 2^m$: une localisation maximale d'un côté force un étalement maximal de l'autre. Réciproquement, une transformée très concentrée impose que la fonction de départ occupe beaucoup de mots. Il n'est donc pas question d'une connaissance imprécise de f ou de $\hat{f}$: la reconstruction est exacte. L'« incertitude » désigne ici une incompatibilité entre deux formes de concentration.

En mécanique quantique, un même état peut être représenté par une fonction d'onde en position et par une fonction d'onde en impulsion ; ces deux représentations sont reliées, à des conventions de normalisation et de changement d'échelle près, par une transformée de Fourier. Pour un état normalisé, les modules au carré fournissent les densités de probabilité correspondantes. Les écarts-types Δx et Δp vérifient alors la relation de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

avec $\hbar = h/(2\pi)$. Elle ne se confond pas avec (8) : notre inégalité porte sur le nombre exact de coefficients non nuls dans un ensemble fini, tandis que la relation quantique porte sur des dispersions de distributions continues. L'analogie est structurelle : dans les deux cas, une transformation de Fourier empêche deux descriptions complémentaires d'être simultanément arbitrairement concentrées.

En français, on rencontre également l'expression **principe d'indétermination**. On parle aussi de *relations d'indétermination de Heisenberg*. Certains physiciens préfèrent ce vocabulaire, car il évite d'assimiler la relation à une simple imperfection des instruments de mesure. « Principe d'incertitude » reste toutefois très courant.

SOURCES

OpenStax — University Physics, Volume 3, § 7.2, The Heisenberg Uncertainty Principle. [Lien direct](#)

Étienne Klein — Comment dire avec des mots ce dont parle la physique ? — CEA, ESNT 2016. [Lien direct](#)