

DM n°06 — Fourier et principe d'incertitude : une porte vers Heisenberg

Dénombrement · Sommes finies ·
Calcul algébrique · Inégalités

On considère des suites finies composées uniquement de 0 et de 1. À partir de motifs très simples ne prenant que les valeurs -1 et 1 , nous allons construire une seconde description de toute fonction définie sur ces suites. Peut-on reconstruire exactement la fonction à partir de cette nouvelle description ? Et les deux descriptions peuvent-elles être très concentrées en même temps ? Cette question conduira à un principe d'incertitude discret qui fait écho, dans un cadre beaucoup plus élémentaire, à celui rencontré en mécanique quantique.

I Des suites binaires aux motifs de signes

Pour commencer, on prend $m = 2$ et l'on note

$$E_2 = \{0, 1\}^2.$$

Pour $a = (a_1, a_2)$ et $x = (x_1, x_2)$ dans E_2 , on pose

$$\varepsilon_a(x) = (-1)^{a_1x_1 + a_2x_2}.$$

- 1 (a) Lister les éléments de l'ensemble E_2 .
- (b) Pour chaque $a \in E_2$, simplifier l'expression de $\varepsilon_a(x)$.
- (c) Pour chaque $a \in E_2$, donner les valeurs de $\varepsilon_a(x)$ lorsque x parcourt E_2 , dans l'ordre choisi en (a).

On appelle désormais **mot binaire de longueur m** tout m -uplet

$$x = (x_1, \dots, x_m)$$

dont chaque coordonnée vaut 0 ou 1. On fixe un entier $m \geq 1$ et l'on note

$$E_m = \{0, 1\}^m.$$

- 2 (a) Justifier que E_m contient 2^m mots.
- (b) Pour $a = (a_1, \dots, a_m)$ et $x = (x_1, \dots, x_m)$ dans E_m , on définit

$$\varepsilon_a(x) = (-1)^{a_1x_1 + \dots + a_mx_m}.$$

Montrer que $\varepsilon_a(x)$ vaut toujours -1 ou 1 , puis que $\varepsilon_a(x)^2 = 1$.

- (c) Fixons une coordonnée k . Expliquer pourquoi changer uniquement le chiffre x_k ne modifie pas $\varepsilon_a(x)$ si $a_k = 0$, alors que cela change son signe si $a_k = 1$.

II Une annulation par appariement

À partir d'ici, nous utiliserons des sommes dont l'indice parcourt un ensemble fini. Si un nombre $u(a)$ est associé à chaque $a \in E_m$, la notation

$$\sum_{a \in E_m} u(a)$$

signifie que l'on additionne une fois chacun des nombres $u(a)$, pour chaque valeur de a appartenant à l'ensemble E_m . Aucun ordre particulier n'est imposé : E_m est fini et l'addition des nombres réels est associative et commutative, donc tout ordre donne le même résultat. Pour $m = 2$, cela revient à additionner les termes correspondant aux éléments listés à la question 1(a).

Pour $x, y \in E_m$, on considère

$$C(x, y) = \sum_{a \in E_m} \varepsilon_a(x) \varepsilon_a(y).$$

3 (a) Calculer $C(x, x)$.

(b) On suppose $x \neq y$ et l'on choisit une coordonnée k telle que $x_k \neq y_k$. Pour tout mot a dont le k -ième chiffre vaut 0, on note a^* le mot obtenu en remplaçant ce chiffre par 1 et en laissant les autres inchangés. Montrer que

$$\varepsilon_{a^*}(x) \varepsilon_{a^*}(y) = -\varepsilon_a(x) \varepsilon_a(y).$$

(c) Expliquer pourquoi les mots de E_m se regroupent ainsi en paires $\{a, a^*\}$, puis en déduire que $C(x, y) = 0$ lorsque $x \neq y$. Résumer les deux cas sous la forme d'une seule relation.

4 (a) Montrer que, pour tous $a, x \in E_m$, on a $\varepsilon_a(x) = \varepsilon_x(a)$.

(b) Montrer que, pour tous $a, b \in E_m$,

$$\sum_{x \in E_m} \varepsilon_a(x) \varepsilon_b(x) = \begin{cases} 2^m, & \text{si } a = b, \\ 0, & \text{si } a \neq b. \end{cases} \quad (1)$$

Éclairage. En Première, deux vecteurs du plan sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul. Dans un repère orthonormé, ce produit scalaire s'obtient en multipliant les coordonnées correspondantes puis en additionnant. Ici, si l'on choisit un ordre pour les 2^m mots $x \in E_m$, les 2^m nombres $\varepsilon_a(x)$ forment une longue liste de coordonnées. La somme de (1) joue alors exactement le même rôle : lorsque $a \neq b$, le « produit coordonnée par coordonnée » de ces deux listes a une somme nulle. C'est pourquoi on parle d'orthogonalité. Plus tard, cette idée se généralise naturellement à des vecteurs ayant beaucoup de coordonnées, puis à des fonctions.

III Détecter les motifs et reconstruire une fonction

Soit f une fonction définie sur E_m et à valeurs réelles. Pour chaque mot $a \in E_m$, on définit le nombre

$$\widehat{f}(a) = \sum_{x \in E_m} f(x) \varepsilon_a(x). \quad (2)$$

Ainsi, $a \mapsto \widehat{f}(a)$ définit elle aussi une fonction sur E_m .

5 (a) Soit $b \in E_m$ et supposons que $f = \varepsilon_b$. Déterminer $\widehat{f}(a)$ pour tout $a \in E_m$.

(b) Fixons un mot $y \in E_m$ et considérons la fonction g qui vaut 1 en y et 0 sur tous les autres mots. Déterminer $\widehat{g}(a)$ pour tout $a \in E_m$. Que peut-on dire de ces nombres ?

Fixons maintenant $y \in E_m$ et posons

$$R(y) = \frac{1}{2^m} \sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a) \varepsilon_a(y).$$

- 6 (a) À l'aide de la définition (2), écrire $R(y)$ sous la forme d'une somme comportant les deux indices a et x .

- (b) Montrer que

$$R(y) = \frac{1}{2^m} \sum_{x \in E_m} f(x) \left(\sum_{a \in E_m} \varepsilon_a(x) \varepsilon_a(y) \right).$$

On pourra utiliser le fait que toutes les sommes sont finies pour changer l'ordre des additions.

- (c) En déduire la formule de reconstruction

$$f(y) = \frac{1}{2^m} \sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a) \varepsilon_a(y). \quad (3)$$

Éclairage. Les nombres $\widehat{f}(a)$ sont appelés les coefficients de Walsh-Fourier de f . La formule (3) montre qu'ils contiennent exactement assez d'information pour reconstruire toutes les valeurs de f .

IV Une quantité globale qui traverse la transformation

- 7 (a) Montrer que

$$\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 = \sum_{x \in E_m} f(x) \left(\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a) \varepsilon_a(x) \right).$$

- (b) En déduire que

$$\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 = 2^m \sum_{x \in E_m} f(x)^2. \quad (4)$$

Cette identité est appelée **identité de Parseval** dans ce cadre.

V Une inégalité élémentaire

Soient $q \geq 1$ et $u_1, \dots, u_q$ des nombres réels. Dans la notation $\sum_{1 \leq i < j \leq q}$, on additionne un terme pour chaque paire d'indices i, j vérifiant $1 \leq i < j \leq q$.

- 8 (a) En développant les deux membres, vérifier l'identité

$$q \sum_{i=1}^q u_i^2 - \left(\sum_{i=1}^q u_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq q} (u_i - u_j)^2. \quad (5)$$

- (b) En déduire

$$\left(\sum_{i=1}^q u_i\right)^2 \leq q \sum_{i=1}^q u_i^2. \quad (6)$$

VI Peut-on concentrer les deux descriptions ?

Pour une fonction h définie sur E_m et à valeurs réelles, on appelle **support** de h l'ensemble

$$\text{supp } h = \{x \in E_m ; h(x) \neq 0\}.$$

Si A est un ensemble fini, $|A|$ désigne son nombre d'éléments.

On suppose désormais que f n'est pas la fonction nulle. On note

$$S = \text{supp } f, \quad s = |S|, \quad T = \text{supp } \widehat{f}, \quad t = |T|.$$

- 9 (a) Pour $a \in E_m$, expliquer pourquoi

$$\widehat{f}(a) = \sum_{x \in S} f(x) \varepsilon_a(x).$$

- (b) Montrer que, pour tout $a \in E_m$,

$$\widehat{f}(a)^2 \leq s \sum_{x \in E_m} f(x)^2. \quad (7)$$

- 10 (a) Montrer alors que

$$\sum_{a \in E_m} \widehat{f}(a)^2 \leq st \sum_{x \in E_m} f(x)^2.$$

- (b) Achever la démonstration du **principe d'incertitude**

$$\boxed{|\text{supp } f| |\text{supp } \widehat{f}| \geq 2^m.} \quad (8)$$

La relation (8) impose une contrainte universelle, mais elle pourrait encore être améliorable si aucune fonction n'atteignait l'égalité. La famille suivante va montrer que la constante 2^m est exacte.

Fixons un entier r tel que $0 \leq r \leq m$ et définissons la fonction f_r sur E_m par

$$f_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_1 = \dots = x_r = 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $r = 0$, aucune coordonnée n'est imposée : f_0 vaut donc 1 partout.

- 11 (a) Déterminer $|\text{supp } f_r|$.

- (b) Soit $a \in E_m$. Supposons qu'il existe un indice j tel que $r < j \leq m$ et $a_j = 1$. Montrer que $\widehat{f}_r(a) = 0$.

- (c) Montrer que, si $a_j = 0$ pour tout indice j tel que $r < j \leq m$, alors $\widehat{f}_r(a) = 2^{m-r}$. En déduire $|\text{supp } \widehat{f}_r|$, puis vérifier que l'égalité est atteinte dans (8).

Ouverture. La transformée construite ici est la transformée de Walsh-Fourier, une forme d'analyse de Fourier adaptée aux données binaires. Dans la théorie de Fourier classique, les motifs élémentaires sont plutôt des oscillations sinusoidales ou des exponentielles complexes ; ici, ils se réduisent aux signes -1 et 1 . Orthogonalité, reconstruction et Parseval sont des manifestations du même mécanisme général.

L'inégalité (8) donne un sens précis à l'expression « ne pas être simultanément trop localisées ». Si $s = |\text{supp } f|$ est petit, alors $st \geq 2^m$ impose

$$t \geq \frac{2^m}{s}.$$

Ainsi, si f n'est non nulle qu'en un seul mot, sa transformée doit être non nulle sur les 2^m mots de E_m . Et réciproquement, une transformée très concentrée oblige la fonction de départ à être plus étalée. Le mot **incertitude** ne signifie donc pas que f ou $\hat{f}$ seraient mal connues : la formule de reconstruction permet au contraire de passer exactement de l'une à l'autre.

En mécanique quantique, un même état peut être décrit en fonction de la position ou en fonction de l'impulsion ; ces deux descriptions sont reliées, à un changement d'échelle près, par une transformée de Fourier. Pour un état normalisé, les densités de probabilité correspondantes ont des écarts-types Δx et Δp qui vérifient l'inégalité de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Ce n'est pas l'inégalité (8) : le cadre est continu et la concentration est mesurée par des dispersions, non par des cardinaux de supports. Le phénomène Fourier sous-jacent est cependant apparenté : rendre une description très concentrée contraint l'autre à s'étaler.

En français, on rencontre aussi l'expression **principe d'indétermination**. On parle également de *relations d'indétermination de Heisenberg*. Certains physiciens préfèrent ce vocabulaire, car il évite de suggérer une simple imprécision des instruments de mesure. L'appellation « principe d'incertitude » reste néanmoins très répandue.