

CORRIGÉ

Terminale · spécialité maths · CORRIGÉ

CHAPITRES

Suites · Récurrence · Calcul
algébrique

DM n°03 — Une récurrence qui boucle en cinq étapes

I La surprise des cinq pas

1

Pour $n \geq 0$, rappelons la proposition

P_n : « les termes $u_0, u_1, \dots, u_{n+1}$ sont définis et strictement positifs ».

Initialisation. Pour $n = 0$, les deux termes

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_1 = b$$

sont définis par les données de l'énoncé. Comme $a > 0$ et $b > 0$, la proposition P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 0$. Supposons P_n vraie. Les termes $u_0, \dots, u_{n+1}$ sont donc déjà définis et strictement positifs. En particulier,

$$u_n > 0,$$

donc $u_n \neq 0$. La formule

$$u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n}$$

permet alors effectivement de définir le terme suivant. De plus,

$$1 + u_{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad u_n > 0,$$

donc

$$u_{n+2} > 0.$$

Ainsi les termes $u_0, \dots, u_{n+2}$ sont définis et strictement positifs : c'est exactement la proposition P_{n+1} .

Conclusion. Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geq 0$. La construction ne se bloque donc à aucun rang : elle définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ à tout rang, et

$$u_n > 0 \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Éclairage. L'existence des termes et leur positivité sont établies simultanément. C'est précisément ce qui évite d'utiliser la relation de récurrence à un rang où le dénominateur n'aurait pas encore été justifié comme non nul.

2

La relation de récurrence donne d'abord

$$u_2 = \frac{1 + u_1}{u_0} = \frac{1 + b}{a}.$$

Puis

$$u_3 = \frac{1 + u_2}{u_1} = \frac{1 + \frac{1+b}{a}}{b} = \frac{a + b + 1}{ab}.$$

Pour u_4 , on simplifie d'abord $1 + u_3$:

$$1 + u_3 = 1 + \frac{a + b + 1}{ab} = \frac{ab + a + b + 1}{ab} = \frac{(a + 1)(b + 1)}{ab}.$$

Ainsi

$$u_4 = \frac{1 + u_3}{u_2} = \frac{(a + 1)(b + 1)}{ab} \times \frac{a}{b + 1} = \frac{a + 1}{b}.$$

Ensuite,

$$u_5 = \frac{1 + u_4}{u_3} = \frac{1 + \frac{a+1}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}} = \frac{\frac{a+b+1}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}} = a,$$

puis

$$u_6 = \frac{1 + u_5}{u_4} = \frac{1 + a}{\frac{a+1}{b}} = b.$$

On obtient donc

$$u_2 = \frac{b + 1}{a}, \quad u_3 = \frac{a + b + 1}{ab}, \quad u_4 = \frac{a + 1}{b}, \quad u_5 = a, \quad u_6 = b.$$

Éclairage. La factorisation $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$ fait apparaître les simplifications essentielles et évite des calculs inutilement lourds.

3

Fixons un entier $n \geq 0$ et posons

$$x = u_n, \quad y = u_{n+1}.$$

D'après la question 1, $x > 0$ et $y > 0$. La relation de récurrence donne

$$u_{n+2} = \frac{1 + y}{x}.$$

Ensuite,

$$u_{n+3} = \frac{1 + u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{1 + \frac{1+y}{x}}{y} = \frac{1 + x + y}{xy}.$$

Puis

$$1 + u_{n+3} = 1 + \frac{1 + x + y}{xy} = \frac{xy + x + y + 1}{xy} = \frac{(x + 1)(y + 1)}{xy}.$$

Donc

$$u_{n+4} = \frac{1 + u_{n+3}}{u_{n+2}} = \frac{(x+1)(y+1)}{xy} \times \frac{x}{y+1} = \frac{x+1}{y}.$$

Enfin,

$$u_{n+5} = \frac{1 + u_{n+4}}{u_{n+3}} = \frac{1 + \frac{x+1}{y}}{\frac{1+x+y}{xy}} = \frac{\frac{1+x+y}{y}}{\frac{1+x+y}{xy}} = x.$$

Comme $x = u_n$, on a bien

$$u_{n+5} = u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

La suite est donc 5-périodique.

Éclairage. La preuve ne dépend pas des valeurs particulières a et b : à n'importe quel rang, les deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} jouent exactement le rôle des deux valeurs initiales.

4 _____

(a) Si la suite est constante, égale à un réel $c > 0$, la relation de récurrence impose

$$c = \frac{1+c}{c}.$$

Comme $c > 0$, on peut multiplier par c :

$$c^2 = c + 1,$$

soit

$$c^2 - c - 1 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 1 + 4 = 5.$$

Les deux solutions sont

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

La première est négative. L'unique solution strictement positive est donc

$$c = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(b) Si (u_n) est constante, alors $u_0 = u_1 = c$. D'après (a), nécessairement $c = \varphi$, donc

$$a = b = \varphi.$$

Réciproquement, supposons

$$a = b = \varphi.$$

Comme φ vérifie $\varphi^2 = \varphi + 1$, on a

$$\frac{1 + \varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi.$$

Considérons la propriété

$$R_n : u_n = u_{n+1} = \varphi.$$

Elle est vraie pour $n = 0$. Si R_n est vraie, alors

$$u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + \varphi}{\varphi} = \varphi,$$

donc R_{n+1} est vraie. Par récurrence, tous les termes sont égaux à φ .

Ainsi

$$(u_n) \text{ est constante} \iff a = b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

II Une quantité qui refuse de bouger

5

On pose

$$z = \frac{1 + y}{x}.$$

(a) On a

$$1 + z = 1 + \frac{1 + y}{x} = \frac{1 + x + y}{x}.$$

D'autre part,

$$1 + y + z = 1 + y + \frac{1 + y}{x} = (1 + y) \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{(1 + x)(1 + y)}{x}.$$

Ainsi

$$1 + z = \frac{1 + x + y}{x}, \quad 1 + y + z = \frac{(1 + x)(1 + y)}{x}.$$

(b) Par définition,

$$H(y, z) = \frac{(1 + y)(1 + z)(1 + y + z)}{yz}.$$

Or

$$yz = y \frac{1 + y}{x} = \frac{y(1 + y)}{x}.$$

En utilisant les expressions de (a),

$$H(y, z) = \frac{(1+y) \frac{1+x+y}{x} \frac{(1+x)(1+y)}{x}}{\frac{y(1+y)}{x}}.$$

On simplifie un facteur $1+y$ ainsi qu'un facteur x :

$$H(y, z) = \frac{(1+x)(1+y)(1+x+y)}{xy}.$$

C'est exactement $H(x, y)$. Donc

$$H\left(y, \frac{1+y}{x}\right) = H(x, y).$$

6 _____

Pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n}.$$

La question 5 s'applique avec

$$x = u_n, \quad y = u_{n+1}, \quad z = u_{n+2},$$

car les termes de la suite sont strictement positifs. Elle donne

$$H(u_{n+1}, u_{n+2}) = H(u_n, u_{n+1}).$$

Autrement dit,

$$I_{n+1} = I_n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

La suite (I_n) est donc constante. Sa valeur est celle du premier terme :

$$I_n = I_0 = H(a, b).$$

Ainsi

$$I_n = \frac{(1+a)(1+b)(1+a+b)}{ab} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Éclairage. Une quantité qui garde la même valeur au cours de l'évolution est appelée un invariant. Ici, cette conservation se vérifie directement à partir de la relation de récurrence.

7 _____

(a) La question 6 montre que, pour tout $n \geq 0$,

$$H(u_n, u_{n+1}) = H(a, b).$$

Ainsi chaque point

$$(u_n, u_{n+1})$$

appartient à la même courbe de niveau, celle de niveau $H(a, b)$.

(b) Cette conservation ne suffit pas à elle seule à prouver la 5-périodicité. En effet, une courbe de niveau peut contenir beaucoup plus de cinq points. Savoir que tous les couples (u_n, u_{n+1}) restent sur une même courbe indique où l'évolution peut se déplacer, mais ne dit pas qu'après cinq étapes on retrouve exactement le point de départ.

La relation

$$u_{n+5} = u_n$$

a été obtenue dans la première partie grâce au calcul exact des itérations.

III Pourquoi le nombre 1 est-il si spécial ?

Comme $\lambda > 0$ et $v_0 = v_1 = 1 > 0$, le même raisonnement qu'à la question 1 montre successivement que chaque dénominateur est non nul, que le terme suivant est défini et qu'il reste strictement positif. La suite (v_n) est donc bien définie à tout rang.

8

On a

$$v_2 = \frac{\lambda + v_1}{v_0} = \lambda + 1.$$

Puis

$$v_3 = \frac{\lambda + v_2}{v_1} = \lambda + (\lambda + 1) = 2\lambda + 1.$$

Ensuite,

$$v_4 = \frac{\lambda + v_3}{v_2} = \frac{\lambda + (2\lambda + 1)}{\lambda + 1} = \frac{3\lambda + 1}{\lambda + 1}.$$

Enfin,

$$v_5 = \frac{\lambda + v_4}{v_3} = \frac{\lambda + \frac{3\lambda + 1}{\lambda + 1}}{2\lambda + 1}.$$

On met le numérateur au même dénominateur :

$$\lambda + \frac{3\lambda + 1}{\lambda + 1} = \frac{\lambda(\lambda + 1) + 3\lambda + 1}{\lambda + 1} = \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 1}{\lambda + 1}.$$

Donc

$$v_2 = \lambda + 1, \quad v_3 = 2\lambda + 1, \quad v_4 = \frac{3\lambda + 1}{\lambda + 1}, \quad v_5 = \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 1}{(\lambda + 1)(2\lambda + 1)}.$$

9

Comme $\lambda > 0$, on a

$$\lambda + 1 > 0 \quad \text{et} \quad 2\lambda + 1 > 0.$$

Le dénominateur de v_5 est donc non nul. Ainsi

$$v_5 = 1$$

équivalent à

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda + 1)(2\lambda + 1).$$

Or

$$(\lambda + 1)(2\lambda + 1) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} v_5 = 1 &\iff \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 \\ &\iff \lambda^2 - \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 1) = 0. \end{aligned}$$

Comme $\lambda > 0$, le cas $\lambda = 0$ est exclu. Finalement,

$$v_5 = 1 \iff \lambda = 1.$$

10

Fixons $\lambda > 0$. Pour tous $x > 0$ et $y > 0$, le même raisonnement qu'à la question 1 garantit d'abord que la relation de récurrence définit une suite à tout rang et que tous ses termes restent strictement positifs.

Supposons d'abord $\lambda = 1$. La suite définie par

$$w_0 = x, \quad w_1 = y, \quad w_{n+2} = \frac{1 + w_{n+1}}{w_n}$$

est exactement du type étudié dans la partie I. La question 3 montre donc que

$$w_{n+5} = w_n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi $\mathcal{A}_1$ est vraie.

Réciproquement, supposons $\mathcal{A}_\lambda$ vraie. Cette affirmation doit alors être vraie en particulier pour le choix

$$x = y = 1.$$

La suite obtenue est précisément (v_n) . Puisqu'elle est 5-périodique,

$$v_5 = v_0 = 1.$$

D'après la question 9, cela impose

$$\lambda = 1.$$

On a donc

$$\mathcal{A}_\lambda \text{ est vraie} \iff \lambda = 1.$$

Synthèse. Pour $\lambda = 1$, le calcul explicite force le retour exact après cinq étapes, quelles que soient les deux valeurs initiales positives. L'invariant H décrit en parallèle une grandeur conservée le long de l'évolution. Lorsque le paramètre change, la périodicité universelle disparaît : le cas initial $v_0 = v_1 = 1$ suffit déjà à le détecter.

Ouverture. La récurrence de Lyness est un exemple de système dynamique discret : l'état au rang n peut être représenté par le couple (u_n, u_{n+1}) . Pour le paramètre étudié ici, tous les états positifs reviennent après cinq itérations. Dans des versions plus générales, les orbites peuvent au contraire parcourir des courbes invariantes sans être périodiques.

SOURCES

R. C. Lyness — Cycles. [Lien direct](#)

Gasull, Mañosa et Xarles — Rational Periodic Sequences for the Lyness Recurrence. [Lien direct](#)