

CORRIGÉ

Terminale · spécialité maths · CORRIGÉ

CHAPITRES

Suites · Récurrence · Calcul
algébrique

Une récurrence qui boucle en cinq étapes

I La surprise des cinq pas

1

Posons, pour $n \geq 0$, $P_n : u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$. La propriété P_0 est vraie puisque $u_0 = a > 0$ et $u_1 = b > 0$. Supposons P_n vraie. Alors

$$u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n} > 0,$$

car le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs. On a donc $u_{n+1} > 0$ et $u_{n+2} > 0$, c'est-à-dire P_{n+1} . Par récurrence, tous les termes sont strictement positifs. En particulier, aucun dénominateur u_n ne s'annule : la suite est bien définie à tout rang.

2

On obtient

$$u_2 = \frac{1 + b}{a}.$$

Puis

$$u_3 = \frac{1 + u_2}{b} = \frac{a + b + 1}{ab}.$$

Pour u_4 , il est utile de factoriser avant de simplifier :

$$1 + u_3 = \frac{ab + a + b + 1}{ab} = \frac{(a + 1)(b + 1)}{ab},$$

d'où

$$u_4 = \frac{1 + u_3}{u_2} = \frac{a + 1}{b}.$$

Enfin,

$$u_5 = \frac{1 + u_4}{u_3} = a, \quad u_6 = \frac{1 + u_5}{u_4} = b.$$

Ainsi

$$u_2 = \frac{b + 1}{a}, \quad u_3 = \frac{a + b + 1}{ab}, \quad u_4 = \frac{a + 1}{b}, \quad u_5 = a, \quad u_6 = b.$$

IDÉE La factorisation $(a+1)(b+1)$ évite un calcul plus lourd et fait apparaître immédiatement les facteurs qui vont se simplifier.

3

Les calculs précédents montrent qu'en partant de deux nombres positifs quelconques x et y , cinq itérations plus tard on retrouve x , puis y à l'itération suivante. Pour un entier $n \geq 0$ fixé, on peut donc reprendre exactement le même calcul avec $x = u_n$ et $y = u_{n+1}$, ces deux nombres étant strictement positifs d'après la question 1. On obtient

$$u_{n+5} = u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

La suite est donc 5-périodique.

IDÉE Deux termes consécutifs déterminent tous les suivants. Retrouver le même couple (u_n, u_{n+1}) signifie donc que toute l'évolution recommence à l'identique.

4

Si la suite est constante, égale à un réel $c > 0$, alors

$$c = \frac{1+c}{c} \iff c^2 - c - 1 = 0.$$

Les solutions sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La première est négative. L'unique possibilité est donc

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Réciproquement, $\varphi^2 = \varphi + 1$, donc $(1+\varphi)/\varphi = \varphi$. Ainsi la suite est constante si et seulement si $a = b = \varphi$.

II Une quantité qui refuse de bouger

5

Avec $z = (1+y)/x$,

$$1+z = \frac{x+y+1}{x}$$

et

$$1+y+z = (1+y) \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{(1+x)(1+y)}{x}.$$

D'autre part, $yz = y(1+y)/x$. En remplaçant dans $H(y, z)$,

$$H(y, z) = \frac{(1+y)(1+z)(1+y+z)}{yz} = \frac{(1+x)(1+y)(1+x+y)}{xy} = H(x, y).$$

Donc

$$H\left(y, \frac{1+y}{x}\right) = H(x, y).$$

6 _____

La relation de récurrence donne $u_{n+2} = (1 + u_{n+1})/u_n$. La question 5, appliquée à $x = u_n$ et $y = u_{n+1}$, entraîne

$$H(u_{n+1}, u_{n+2}) = H(u_n, u_{n+1}).$$

Autrement dit, $I_{n+1} = I_n$. La suite (I_n) est donc constante et

$$I_n = I_0 = H(a, b) = \frac{(1+a)(1+b)(1+a+b)}{ab}.$$

IDÉE Une quantité dont la valeur est conservée au cours de l'évolution est souvent appelée un invariant. Ici, l'égalité se vérifie directement : aucun théorème général n'est nécessaire.

7 _____

Tous les points (u_n, u_{n+1}) satisfont $H(u_n, u_{n+1}) = H(a, b)$. Ils appartiennent donc tous à la même courbe de niveau, celle de niveau $H(a, b)$. Cette information ne suffit pas, à elle seule, à établir la 5-périodicité. Une courbe de niveau peut contenir bien plus de cinq points : savoir que l'évolution reste sur cette courbe ne dit pas encore qu'elle revient à son point de départ après cinq étapes. La périodicité a été obtenue dans la première partie grâce au calcul exact des itérations.

III Pourquoi le nombre 1 est-il si spécial ?

8 _____

Comme $v_0 = v_1 = 1$,

$$v_2 = \lambda + 1, \quad v_3 = \lambda + v_2 = 2\lambda + 1.$$

Puis

$$v_4 = \frac{\lambda + v_3}{v_2} = \frac{3\lambda + 1}{\lambda + 1}.$$

Enfin,

$$v_5 = \frac{\lambda + v_4}{v_3} = \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 1}{(\lambda + 1)(2\lambda + 1)}.$$

9 _____

Puisque $\lambda > 0$, tous les dénominateurs sont strictement positifs. Ainsi

$$\begin{aligned} v_5 = 1 &\iff \lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda + 1)(2\lambda + 1) \\ &\iff \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 \iff \lambda(\lambda - 1) = 0. \end{aligned}$$

Comme $\lambda > 0$, $v_5 = 1 \iff \lambda = 1$.

10 _____

Si $\lambda = 1$, la première partie a montré que, quelles que soient les deux valeurs initiales strictement positives, la suite obtenue est 5-périodique. Réciproquement, supposons que la 5-périodicité soit vraie pour toutes les valeurs initiales strictement positives. Elle doit alors être vraie pour le choix particulier $v_0 = v_1 = 1$. On

doit donc avoir $v_5 = v_0 = 1$. D'après la question 9, cela impose $\lambda = 1$. Ainsi la 5-périodicité universelle a lieu exactement pour $\lambda = 1$.

La récurrence de Lyness est un exemple particulièrement simple d'un système dynamique discret : l'état à un instant peut être représenté par le couple (u_n, u_{n+1}) . Pour le paramètre étudié ici, tous les états positifs reviennent après cinq itérations. Dans des versions plus générales, les orbites peuvent au contraire parcourir des courbes invariantes sans être périodiques.

SOURCES

R. C. Lyness, « Cycles », The Mathematical Gazette, 26 (1942), p. 62.

A. Gasull, V. Mañosa et X. Xarles, « Rational Periodic Sequences for the Lyness Recurrence » (2010).