

DM n°03 — Une récurrence qui boucle en cinq étapes

En 1942, R. C. Lyness signale dans The Mathematical Gazette une famille de récurrences rationnelles capables de produire des cycles indépendamment, dans certains cas, des valeurs choisies au départ. Le problème étudie le plus célèbre de ces phénomènes.

Les réponses doivent être justifiées. Aucun résultat général sur les récurrences d'ordre 2 n'est supposé connu ; la relation ci-dessous suffit. Aucune calculatrice n'est nécessaire.

On fixe deux réels strictement positifs a et b . On pose

$$u_0 = a, \quad u_1 = b.$$

À partir de deux termes consécutifs déjà construits, on souhaite poursuivre par la relation

$$u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n} \quad (n \geq 0).$$

Il faut d'abord vérifier que cette construction ne se bloque jamais.

I La surprise des cinq pas

- 1 Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la proposition

P_n : « les termes $u_0, u_1, \dots, u_{n+1}$ sont définis et strictement positifs ».

Démontrer par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 0$. En déduire que la relation précédente définit bien une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ à tout rang et que tous ses termes sont strictement positifs.

- 2 Calculer et simplifier successivement u_2, u_3, u_4, u_5 puis u_6 en fonction de a et de b .
- 3 Les calculs précédents suggèrent que

$$u_{n+5} = u_n.$$

Démontrer cette égalité pour tout $n \geq 0$. On dira qu'une suite vérifiant cette propriété est 5-périodique.

- 4 Une suite constante peut évidemment être 5-périodique.

- (a) Déterminer l'unique réel $c > 0$ pour lequel la suite constante $u_n = c$ vérifie la relation de récurrence.
- (b) En déduire que (u_n) est constante si et seulement si

$$a = b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

II Une quantité qui refuse de bouger

Pour $x > 0$ et $y > 0$, on pose

$$H(x, y) = \frac{(1+x)(1+y)(1+x+y)}{xy}.$$

5 Soient $x > 0, y > 0$ et

$$z = \frac{1+y}{x}.$$

- (a) Simplifier $1+z$ puis $1+y+z$.
- (b) En déduire, sans développer tous les produits, que

$$H(y, z) = H(x, y).$$

6 Pour $n \geq 0$, on pose

$$I_n = H(u_n, u_{n+1}).$$

Montrer que $I_{n+1} = I_n$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que la suite (I_n) est constante et donner sa valeur en fonction de a et de b .

7 Pour $C > 0$, on appelle ici courbe de niveau C l'ensemble des points (x, y) tels que $x > 0, y > 0$ et $H(x, y) = C$.

- (a) Traduire géométriquement le résultat de la question précédente pour les points (u_n, u_{n+1}) .
- (b) Expliquer pourquoi cette seule information ne suffit pas à démontrer que $u_{n+5} = u_n$ pour tout $n \geq 0$.

III Pourquoi le nombre 1 est-il si spécial ?

On remplace maintenant le nombre 1 du numérateur par un paramètre $\lambda > 0$. Dans cette partie seulement, on pose

$$v_0 = v_1 = 1,$$

puis on poursuit par

$$v_{n+2} = \frac{\lambda + v_{n+1}}{v_n} \quad (n \geq 0).$$

Comme $\lambda > 0$, le raisonnement de la question 1 s'applique de la même façon : tous les termes v_n sont définis et strictement positifs.

- 8 Calculer et simplifier v_2, v_3, v_4 puis v_5 .
- 9 Montrer que

$$v_5 = 1 \iff \lambda = 1.$$

10 Fixons $\lambda > 0$. Pour tous $x > 0$ et $y > 0$, le raisonnement de la question 1 montre que la construction donnée par les deux valeurs initiales et la relation ci-dessous est bien définie à tout rang et reste strictement positive.

On considère l'affirmation $\mathcal{A}_\lambda$ suivante : pour tous $x > 0$ et $y > 0$, la suite (w_n) définie par

$$w_0 = x, \quad w_1 = y, \quad w_{n+2} = \frac{\lambda + w_{n+1}}{w_n}$$

est 5-périodique.

Montrer que $\mathcal{A}_\lambda$ est vraie si et seulement si $\lambda = 1$.

Synthèse. Le calcul exact des itérations révèle ici une périodicité exceptionnelle. La fonction H , elle, fournit une grandeur qui reste inchangée lorsque le couple (u_n, u_{n+1}) évolue. Dans des systèmes plus compliqués, repérer de telles grandeurs conservées permet souvent de comprendre une dynamique que l'on ne sait plus calculer explicitement.