

Une récurrence qui boucle en cinq étapes

En 1942, R. C. Lyness signale dans The Mathematical Gazette une famille de récurrences rationnelles capables de produire des cycles indépendamment, dans certains cas, des valeurs choisies au départ. Le problème étudie le plus célèbre de ces phénomènes.

Les réponses doivent être justifiées. Aucun résultat général sur les récurrences d'ordre 2 n'est supposé connu ; la relation ci-dessous suffit. Aucune calculatrice n'est nécessaire.

On fixe deux réels strictement positifs a et b et l'on définit $(u_n)_{n \geq 0}$ par

$$u_0 = a, \quad u_1 = b, \quad u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n} \quad (n \geq 0).$$

I La surprise des cinq pas

- 1 Montrer par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs. En déduire que la suite est bien définie pour tout $n \geq 0$.
- 2 Calculer et simplifier successivement u_2, u_3, u_4, u_5 puis u_6 en fonction de a et b .
- 3 Les deux dernières expressions suggèrent une propriété générale. La formuler puis la démontrer pour tout $n \geq 0$. On dira qu'une suite vérifiant cette propriété est 5-périodique.
- 4 Une suite constante peut évidemment être 5-périodique.
 - (a) Déterminer l'unique réel $c > 0$ pour lequel la suite constante $u_n = c$ vérifie la relation de récurrence.
 - (b) En déduire que (u_n) est constante si et seulement si

$$a = b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

II Une quantité qui refuse de bouger

Pour $x > 0$ et $y > 0$, on pose

$$H(x, y) = \frac{(1+x)(1+y)(1+x+y)}{xy}.$$

- 5 Soient $x > 0, y > 0$ et $z = \frac{1+y}{x}$.
 - (a) Simplifier $1 + z$ puis $1 + y + z$.
 - (b) En déduire, sans développer tous les produits, que $H(y, z) = H(x, y)$.
- 6 Montrer que la suite

$$I_n = H(u_n, u_{n+1})$$

est constante. Donner sa valeur en fonction de a et de b .

- 7 Pour $C > 0$, on appelle ici courbe de niveau C l'ensemble des points (x, y) du premier quadrant vérifiant $H(x, y) = C$. Traduire géométriquement le résultat de la question précédente pour les points (u_n, u_{n+1}) . Expliquer ensuite pourquoi cette information, prise isolément, ne suffit pas à démontrer la 5-périodicité.

III Pourquoi le nombre 1 est-il si spécial ?

On remplace maintenant le nombre 1 du numérateur par un paramètre $\lambda > 0$. Dans cette partie seulement, on considère la suite (v_n) définie par

$$v_0 = v_1 = 1, \quad v_{n+2} = \frac{\lambda + v_{n+1}}{v_n}.$$

- 8 Calculer et simplifier v_2, v_3, v_4 puis v_5 .
- 9 Montrer que $v_5 = 1 \iff \lambda = 1$.
- 10 Pour un $\lambda > 0$ fixé, on considère l'affirmation suivante : quelles que soient les deux valeurs initiales strictement positives, la récurrence $w_{n+2} = (\lambda + w_{n+1})/w_n$ produit une suite 5-périodique. Montrer que cette affirmation est vraie si et seulement si $\lambda = 1$.

Ce problème met côte à côte deux façons d'étudier une évolution discrète. Le calcul exact des itérations révèle ici une périodicité exceptionnelle ; la fonction H , elle, fournit une grandeur qui reste inchangée lorsque le couple (u_n, u_{n+1}) évolue. Dans l'étude de systèmes plus compliqués, repérer de telles grandeurs conservées est souvent un moyen de comprendre une dynamique que l'on ne sait plus calculer explicitement.