

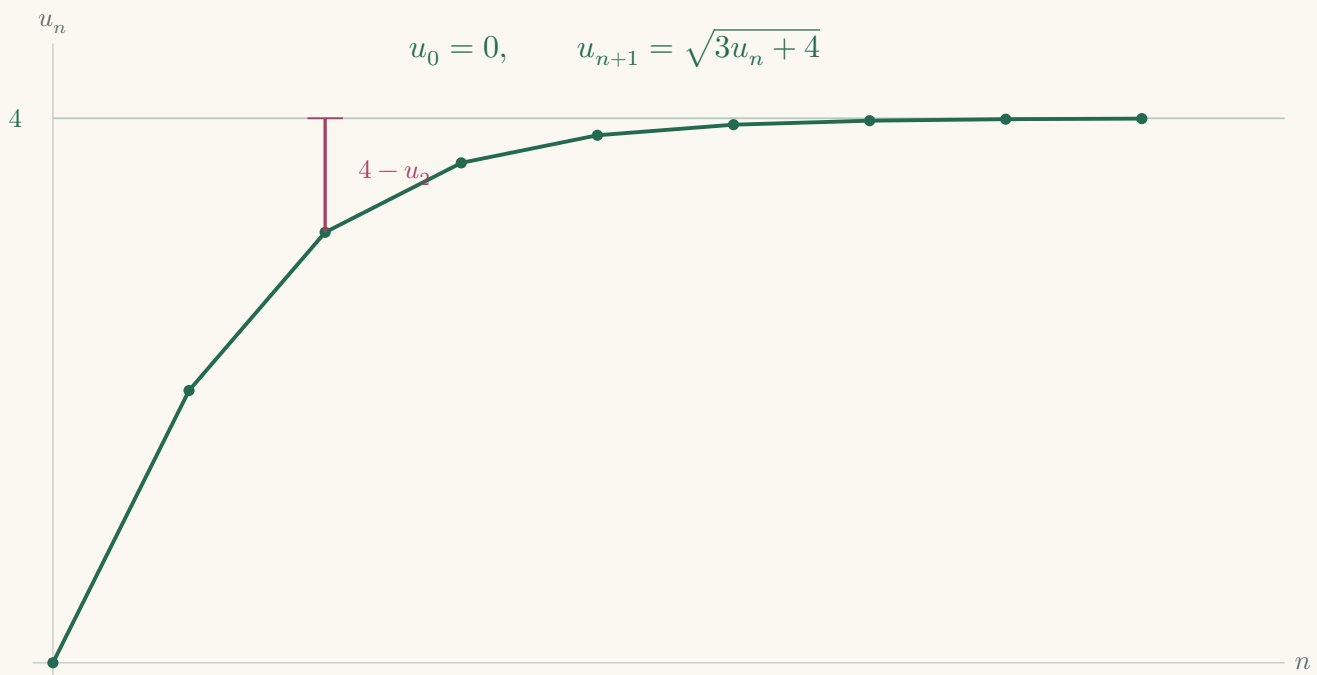


Le bagage essentiel

pour préparer le

Concours général de mathématiques

Cours ciblé, méthodes de recherche
et plan de préparation



0 · Comment utiliser ce guide

Le sujet est devant toi. Tu lis une question, puis tu la relis. Les objets te sont familiers : une suite, une racine carrée, une limite. Pourtant, aucun outil n'est annoncé. Tu calcules quelques termes : ils semblent croître et se rapprocher d'une valeur. Cela donne une piste, mais pas une preuve. Tu essaies de comparer deux termes consécutifs ; le calcul ne fait pas apparaître de signe utilisable. Faut-il transformer la différence, chercher d'abord une borne ou introduire une autre suite ?

C'est souvent à cet endroit que commence le travail du Concours général. Tu dois décider quelle information chercher, choisir un outil, puis justifier ce qu'il permet d'affirmer. Une observation peut suggérer la monotonie ; il reste à la démontrer. Un théorème peut donner la convergence ; il reste à vérifier ses hypothèses. Ce sont ces décisions et ces preuves qui permettront d'évaluer ta démarche.

Tu connais peut-être ton cours, sans savoir quoi approfondir, dans quel ordre ni jusqu'où aller. Quand commencer les annales ? Comment combler l'écart entre un exercice de classe et un problème qui te laisse choisir ta méthode ? Peut-être aussi que tu doutes de ton niveau. Ce guide te donne un bagage ciblé, des priorités et un plan de préparation pour commencer à chercher, puis comprendre précisément ce qui te bloque.

Relier le cours à tes difficultés

Le raisonnement et les suites servent de premier socle. Tu y apprendras à lire les hypothèses, à commencer une preuve et à vérifier les outils que tu emploies. Les autres chapitres complètent ce bagage selon les questions rencontrées : calcul, arithmétique, comptages, probabilités, analyse et géométrie.

Les exemples montrent comment passer d'une observation à un argument. Les situations de recherche te laissent essayer avant la solution ; les renvois aux annales te donnent ensuite une question où réutiliser l'outil. La carte et les parcours t'aident à choisir les séances suivantes.

Ta première séance

L'épreuve de mathématiques se passe en **Terminale, voie générale, spécialité mathématiques**. Tu peux commencer dès la Première : le jury recommande une préparation sur les deux années.

Ouvre les premières questions de [CGL 2024](#), exercice 1. Consacre-leur une trentaine de minutes, sans correction. Écris ce que tu parviens à justifier et la première étape qui te manque. Une difficulté de récurrence te renvoie au chapitre 2 ; une difficulté sur les bornes ou la convergence, au chapitre 3. Reprends ensuite la question avec ce que tu viens d'apprendre.

Tu connais déjà ce sujet ? Choisis une autre entrée récente dans la [carte de préparation](#). En Première, ou avant d'avoir étudié certaines notions, commence par les questions compatibles avec ton cours. Un résultat que tu n'as pas encore appris n'est pas une faiblesse de raisonnement.

Cette première tentative sert à choisir ton travail. Tu n'as pas besoin de résoudre le problème entier pour commencer une préparation. La page suivante décrit comment enchaîner les séances ; les parcours selon le temps disponible t'aideront à ajuster l'ensemble.

Organiser ta préparation

Du premier essai aux conditions de l'épreuve

- 1 Repère tes lacunes prioritaires.** À partir d'une question cherchée, nomme le premier obstacle : résultat inconnu, calcul faux, idée absente ou argument que tu ne sais pas rédiger. La [checklist](#), p. 67, permet de vérifier aussi les outils que tu crois connaître.
- 2 Reprends le socle qui te manque.** Commence par raisonnement, suites et calcul. Ajoute les autres outils en fonction des obstacles rencontrés. Pour une notion nouvelle, énonce le résultat avec ses hypothèses et refais un exemple sans support.
- 3 Associe l'outil à un problème.** La [carte de préparation](#), p. 64, te donne des entrées d'annales. Cherche une question où la méthode n'est pas annoncée, puis une variante : savoir énoncer un théorème ne suffit pas à reconnaître son emploi.
- 4 Apprends à reprendre une recherche.** Écris de petits cas, reformule la conclusion et utilise les résultats précédents. Quand tes essais n'apportent plus d'information, identifie ce qui manque avant de demander un indice. Le chapitre 10 montre cette démarche sur un problème.
- 5 Allonge progressivement les séances.** Passe de quelques questions à une partie, puis à un problème entier. Rédige les résultats obtenus, même partiels. Le chapitre 11 explique quand ouvrir une correction et comment la lire sans interrompre toute recherche.
- 6 Reprends ce qui t'a bloqué.** Note la cause dans un carnet d'erreurs, répare le passage et refais la question quelques jours plus tard sans aide. Une solution que tu sais suivre à la lecture peut encore te manquer quand tu cherches seul.
- 7 Prépare les cinq heures.** Réserve des sujets encore inconnus pour les simulations. Analyse ensuite ta copie : questions choisies, périodes sans progrès, calculs et preuves à réparer. Les [parcours](#), p. 66, adaptent ces étapes au temps restant.

Pour vérifier un acquis : *énoncer* le résultat, *mobiliser* l'outil sans qu'il soit annoncé, puis *adapter* la méthode à une variante. Reviens au cours ou à une nouvelle question selon l'étape qui te résiste.

Le parcours recommandé pour un entraînement organisé

La préparation complète AlgèBrille organise la progression : problèmes de difficulté croissante, indices gradués, corrections qui expliquent l'origine des idées, reprises et simulations. Tu disposes d'un parcours pour travailler régulièrement, sans sélectionner seul tous les problèmes ni construire tout le calendrier. [Retrouve la préparation complète sur la page Concours général.](#)

Le guide reste aussi utilisable en autonomie : tu organises alors tes séances, le choix des problèmes et tes reprises.

Utiliser le cours pendant ta préparation

Lire avec un crayon

Quand un bloc « **Chercher** » apparaît, arrête-toi avant de poursuivre ; les essais guidés sont commentés immédiatement. La légende du sommaire te permet de retrouver le rôle de chaque encadré.

Quand tu lis la solution, repère ce qui a suggéré la méthode et vérifie chaque passage. Referme ensuite le guide et refais la preuve : tu sauras quelles étapes tu peux retrouver et lesquelles demandent encore du travail.

Si une étape te résiste, note ce qui manque : le sens d'une définition, une hypothèse de théorème ou une idée de calcul. Reprends ce point avant de relire toute la solution. Après le chapitre, cherche une question d'annale ou un exercice proposé en fin de guide pour réutiliser la méthode.

Origine et priorité des outils

L'**origine habituelle** indique où un outil est généralement rencontré : lycée, Maths expertes, MPSI ou préparation olympique. C'est un repère pédagogique, pas la liste du programme officiel d'une session donnée. Un résultat rencontré en MPSI peut être étudié seul, sans apprendre les chapitres qui l'entourent.

La **priorité CGL** t'aide à répartir ton temps. Commence par les outils « indispensables », puis ceux qui sont « très rentables ». Un **approfondissement utile** prolonge une méthode du socle. Les **compléments facultatifs** répondent à un besoin particulier : tu peux les reprendre quand un problème t'en donne l'occasion. Ces indications ne prédisent pas les sujets à venir et ne constituent pas un programme supplémentaire à finir avant les annales.

Conventions de lecture

On prend $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$. Les intervalles sont des intervalles réels. Une suite est indexée par $n \in \mathbb{N}$, sauf indication contraire. Les ensembles de nombres et les manipulations d'intervalles sont repris après le chapitre de logique.

Une implication est distinguée d'une équivalence ; une expérience numérique est distinguée d'une preuve. Dans les encadrés du jury, l'observation du rapport est suivie d'un conseil de travail AlgèBrille : tu peux comparer cette observation à tes propres difficultés.

Choisir la suite de ta lecture. Pour comprendre les attentes du concours, poursuis avec le chapitre 1. Pour réparer un obstacle déjà identifié, utilise le sommaire et reviens ensuite à ta question.

Sommaire

0 · Comment utiliser ce guide	2
1 · Ce que le concours évalue	6
2 · Raisonner et rédiger	9
3 · Suites et récurrences	20
4 · Arithmétique et nombres	28
5 · Calcul algébrique, sommes et polynômes	34
6 · Dénombrement et combinatoire	40
7 · Probabilités	44
8 · Analyse : la sélection utile	47
9 · Géométrie utile au CGL	56
10 · Méthodes de recherche transversales	59
11 · Comment travailler une annale	62
12 · Carte de préparation	64
13 · Checklist finale	67
14 · Ressources pour t'entraîner	68
Continuer la préparation	69

Repérer le contenu des encadrés

Définition / propriété / méthode : un cadre formel et ses hypothèses.

Exemple : un calcul ou une preuve qui utilise l'outil.

Essai guidé : une question, suivie d'un commentaire immédiat.

Chercher : une pause de recherche ; la réponse est plus loin.

Attention : une erreur possible ou une hypothèse à contrôler.

Ce que montre le jury : une observation sourcée, suivie d'un conseil de travail AlgèBrille.

Les titres permettent de distinguer les encadrés même en niveaux de gris. Le sommaire, les renvois aux annales et les liens de la dernière partie sont cliquables.

1 · Ce que le concours évalue

Le Concours général vise à distinguer les meilleurs élèves et à valoriser leurs travaux. Éduscol précise que les sujets respectent les programmes officiels, tout en proposant des épreuves plus longues et plus exigeantes que celles du baccalauréat. Voir la [présentation officielle du concours](#).

Ce que cela demande en mathématiques

Maîtriser les outils. Tu dois connaître les résultats du cours, leurs hypothèses et leur domaine de validité. Il faut aussi effectuer les calculs nécessaires sans perdre une condition ou une solution.

Trouver une démarche. L'énoncé ne nomme pas toujours la méthode. Tu dois essayer, reformuler et choisir un outil adapté. Une question nouvelle peut demander une combinaison de résultats familiers.

Construire une preuve. Une idée ou un résultat doit devenir un raisonnement que le correcteur peut vérifier. La page suivante précise les justifications à faire apparaître et les conclusions à distinguer.

Mener un travail long. Les sujets de 2021 à 2026 prévoient cinq heures et permettent de choisir l'ordre des questions. Ceux de 2024, 2025 et 2026 autorisent aussi l'emploi d'un résultat antérieur non démontré, à condition de le signaler. Lis les consignes de ton sujet, répartis ton temps et rédige les arguments obtenus pour pouvoir poursuivre après un blocage.

Pourquoi connaître le cours ne suffit pas toujours

Dans une question sur une suite, calculer quelques termes peut suggérer une croissance. Il faut ensuite choisir comment la prouver : différence de deux termes, comparaison de $f(x)$ et x , ou récurrence. Une question suivante peut utiliser les mêmes termes pour étudier une divisibilité. Ce changement de question t'oblige à reprendre la relation de récurrence avec un autre objectif.

Au brouillon, écris ce que tes essais suggèrent. Relis les questions précédentes : une identité ou une borne déjà obtenue peut fournir l'étape qui manque. Sur la copie, explique pourquoi cet argument s'applique et permet de conclure.

Ce que montre le jury · 2021 et 2025

Les rapports présentent trois exercices de thèmes différents, reposant sur les outils de spécialité. Ils recommandent une préparation menée pendant les années de Première et de Terminale. Voir [rapport 2021](#), §2 et §5 et [rapport 2025](#), §2 et §4.

Pour ta préparation. Le programme fournit les outils, mais les problèmes demandent de décider comment les utiliser. Associe donc la révision d'un résultat à une question d'annale, puis reprends le cours pour les étapes que tu ne sais pas justifier.

Le socle reste celui de la spécialité et des outils usuels du lycée. Un sujet peut toutefois construire un outil nouveau ; un approfondissement comme Bézout peut aussi rendre une étape plus courte ou plus facile à reconnaître. Tu peux commencer les annales avant de connaître ces outils, puis les ajouter quand ils améliorent ta recherche ou ta preuve.

Construire une preuve vérifiable

Trouver une bonne idée ou obtenir le bon résultat ne suffit pas : le correcteur doit pouvoir vérifier ton raisonnement sans reconstruire les étapes laissées implicites. Aux passages décisifs, précise ce qui autorise l'argument : une hypothèse, une définition, un résultat antérieur ou un théorème dont les conditions sont remplies.

Dire ce que tu as établi

Une observation peut suggérer une conjecture. Trois termes croissants donnent une piste, pas une preuve pour tous les rangs. Il reste à démontrer la comparaison avec un rang arbitraire, par exemple grâce à une récurrence.

Une implication n'est pas une équivalence. Pour des réels a, b , $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$. La réciproque est fautive en général : $3^2 = (-3)^2$, mais $3 \neq -3$. Elle devient vraie si a, b ont le même signe, par exemple s'ils sont tous deux positifs ou nuls. Élever une équation au carré peut donc ajouter des solutions. Écris une équivalence seulement quand la transformation est réversible sous les conditions données ; sinon, garde une implication et vérifie les candidats dans l'équation initiale.

Une condition nécessaire peut rester insuffisante. Une limite éventuelle d'une suite peut devoir vérifier une équation. Résoudre cette équation ne démontre pas que la suite converge. Il faut démontrer séparément la convergence, par exemple en vérifiant les hypothèses d'un théorème ou en majorant l'erreur. La relation de récurrence permet ensuite d'identifier la limite, si le passage à la limite est justifié.

Une articulation à justifier

Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, écrire seulement « la limite vérifie $\ell = f(\ell)$ » laisse plusieurs questions ouvertes : la suite converge-t-elle ? Sa limite appartient-elle au domaine de f ? La fonction est-elle continue en ce point ?

Une fois ces faits démontrés, tu peux écrire : « La suite converge vers ℓ , qui appartient au domaine de f . Comme f est continue en ℓ , on a $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$. Le décalage des indices donne $u_{n+1} \rightarrow \ell$; l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ entraîne donc $\ell = f(\ell)$. »

Relire une preuve

À chaque « donc », demande ce qui permet la conclusion. Avant une division, contrôle le dénominateur. Avant un changement de sens d'inégalité, contrôle le signe. Pour un argument valable à tous les rangs ou pour tous les réels d'un domaine, vérifie que tu n'as pas traité seulement quelques cas.

Tu peux abréger un calcul courant dont les étapes sont vérifiables. Garde les justifications qui font avancer la preuve : application d'un théorème, utilisation d'une hypothèse ou passage de cas particuliers à une affirmation générale. Le chapitre 2 fournit des débuts de rédaction et des exemples complets.

Les sujets officiels rappellent aussi que la clarté et la précision de la rédaction entrent dans l'appréciation de la copie : voir CGL 2023, p. 2. Ce rappel accompagne le travail de preuve ; il ne le remplace pas.

Lire les annales et les rapports

Les sessions récentes sont le meilleur point de départ pour ta préparation. Les sujets plus anciens apportent des problèmes utiles, mais ne doivent pas fixer seuls le bagage à apprendre : le programme a changé.

Repères dans les sessions 2021 à 2026

Année	Questions et objets étudiés
2021	Suite dépendant du terme initial ; tirages avec remise partielle ; contraintes sur une fonction.
2022	Existence et unicité ; chemins sur une grille ; tournoi probabiliste.
2023	Énumération des rationnels par une suite ; racines de polynômes variables ; polygones sur des courbes.
2024	Suite dépendant de l'initialisation ; jeu de boîtes ; partie entière et ensembles de multiples.
2025	Opération sur une parabole ; récurrence avec paramètre ; équation fonctionnelle.
2026	Produits continués ; sommes signées et polynômes ; partage géométrique et stratégies.

Les suites apparaissent dans plusieurs de ces sujets, avec des questions de limite, de calcul ou d'arithmétique. Travaille-les sous ces différentes formes. Tu trouveras les liens vers les exercices dans la carte de préparation, p. 64.

Ce que montre le jury - 2023

Le rapport indique que le deuxième exercice, sur les racines de polynômes, a été le plus investi et le mieux réussi. [Rapport 2023](#), §2.

Pour ta préparation. Cet exercice donne un repère concret pour situer ton travail : ses premières questions utilisent équations, variations et convergence, comme le montre le sujet. Si ces étapes te résistent, retravaille-les en priorité avant les questions plus avancées. La réussite relative signalée par le jury indique un point d'appui pour la préparation ; elle ne fixe pas un seuil officiel de sélection. Pour situer une racine, cherche un signe et des variations plutôt qu'une formule explicite.

Lire le rapport après ta recherche

Après avoir cherché, lis le passage du rapport consacré à l'exercice. Compare-le à ta copie : quelle est la première étape que tu n'as pas su justifier ? Selon le cas, il faudra revoir un résultat, reprendre un calcul ou chercher ce qui pouvait suggérer l'idée.

2 · Raisonner et rédiger

Priorité CGL : Indispensable. **Origine habituelle :** lycée, approfondissement MPSI.

Essai guidé · Une implication et sa réciproque

Pour un réel x , compare « $x = 3$ entraîne $x^2 = 9$ » et « $x^2 = 9$ entraîne $x = 3$ ». Que change la condition $x \geq 0$?

Implication et équivalence

Une implication $P \Rightarrow Q$ affirme que chaque fois que P est vraie, Q l'est aussi. Pour la prouver directement, on suppose P , puis on déduit Q . On ne suppose pas Q .

La réciproque est $Q \Rightarrow P$: elle demande une autre preuve. L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ réunit les deux implications. On la prouve dans les deux sens, ou par des transformations toutes réversibles.

Sur $\mathbb{R}$, $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$; la réciproque échoue pour $x = -3$. En revanche,

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, 3\}.$$

Sous l'hypothèse $x \geq 0$, la dernière alternative devient $x = 3$. Une hypothèse supplémentaire peut donc rendre vraie une réciproque auparavant fausse.

Résoudre sans perdre ni inventer de solutions

Cherchons les réels vérifiant $\sqrt{x+3} = x-1$. La racine impose $x \geq -3$; l'égalité impose aussi $x-1 \geq 0$. Toute solution appartient donc à $[1, +\infty[$. Sur cet ensemble, les deux membres sont positifs ou nuls : élever au carré est réversible.

$$\sqrt{x+3} = x-1 \Leftrightarrow x+3 = (x-1)^2 \Leftrightarrow (x-4)(x+1) = 0.$$

Seul 4 appartient à $[1, +\infty[$; il vérifie l'équation initiale. L'ensemble des solutions est $\{4\}$.

Attention

Pour prouver $P \Rightarrow Q$, déduire P en partant de Q ne suffit pas : tu as seulement prouvé l'autre sens. Une implication n'est fausse que dans le cas où P est vraie et Q fausse. Un contre-exemple doit vérifier les hypothèses de l'énoncé.

À retenir. Indique le domaine avant une chaîne d'équivalences. Si une transformation est seulement nécessaire, garde $\Rightarrow$ et vérifie ensuite les candidats.

Chercher · Un nombre adapté à x , ou un nombre valable pour tous les x ?

Prends quelques minutes avant la page suivante. Dans chaque énoncé, faut-il trouver y après avoir fixé un réel x , ou trouver un même y qui convienne à tous les réels x ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x; \quad \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x.$$

Quantificateurs et négations

Reprenons les deux énoncés de la page précédente. Dans le premier énoncé, tu dois prouver ceci : pour chaque réel x , tu peux construire un réel $y > x$. Tu fixes donc un x quelconque, puis tu prends $y = x + 1$. Ce nombre vérifie $y > x$; la construction peut changer avec x .

Dans le second, tu devrais trouver d'abord un réel y qui soit supérieur à *tous* les réels x . Aucun ne convient : pour un y proposé, le réel $x = y + 1$ vérifie $x > y$. L'ordre des quantificateurs indique donc si y peut dépendre de x , ou doit être fixé indépendamment de lui.

Nier une affirmation

Pour une propriété $P(x)$ sur un ensemble E ,

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg P(x),$$

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \neg P(x).$$

La négation de « P et Q » est « non P ou non Q » ; celle de « P ou Q » est « non P et non Q ». Nier $P \Rightarrow Q$ donne P et non Q . Le « ou » mathématique est inclusif : il autorise que les deux propositions soient vraies.

Une suite (u_n) est bornée si

$$\exists M \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Pour nier cet énoncé, remplace « il existe » par « pour tout », puis « pour tout » par « il existe », sans changer leur ordre. Nie aussi l'inégalité. Tu obtiens

$$\forall M \in [0, +\infty[, \exists n \in \mathbb{N}, |u_n| > M.$$

Cela signifie : chaque borne proposée échoue à au moins un rang, qui peut dépendre de cette borne. On ne demande pas que tous les termes dépassent M .

Non bornée, sans tendre vers l'infini

La suite $v_n = n$ si n est pair, $v_n = 0$ sinon, n'est pas bornée : pour $M \geq 0$, prends un entier $k > M/2$; alors $v_{2k} = 2k > M$. Elle ne tend pourtant pas vers $+\infty$, puisque ses termes impairs restent nuls. « Non bornée » et « tend vers $+\infty$ » ont des quantificateurs différents.

Attention

La négation de $x < a$ est $x \geq a$, pas $x > a$. Nier « pour tout x , $P(x) \Rightarrow Q(x)$ » exige un x qui vérifie $P(x)$ et ne vérifie pas $Q(x)$.

Pour t'entraîner. Dans CGL 2026, exercice 3, repère le choix du premier joueur, la réponse du second et ce que chaque stratégie doit garantir pour tous les choix adverses.

De l'énoncé au début de la preuve

Commencer une affirmation universelle

L'énoncé porte sur tous les éléments de E . Un exemple particulier ne peut donc pas suffire : la preuve doit fonctionner avec un élément quelconque. Pour démontrer $\forall x \in E, P(x)$, commence par « Soit $x \in E$ ». Tu fixes un élément quelconque de E , sans lui attribuer d'autre propriété que les hypothèses de l'énoncé. Si la preuve n'utilise aucune restriction supplémentaire sur x , sa conclusion vaut pour tous les éléments de E .

Exemple · Une propriété universelle

Montrons que $a^2 + b^2 \geq 2ab$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Comme tout carré réel est positif ou nul,

$$(a - b)^2 \geq 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0.$$

En ajoutant $2ab$, on obtient $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Les réels a, b étant arbitraires, le résultat vaut pour tout couple réel. Tester seulement $a = 1, b = 2$ aurait prouvé un unique cas.

Une existence demande un témoin

Cette fois, un seul objet qui convient suffit. Il faut dire lequel et vérifier les conditions demandées. Pour prouver $\exists x \in E, P(x)$, tu peux proposer un candidat, puis vérifier son appartenance à E et la propriété P . Tu peux l'avoir trouvé en essayant plusieurs valeurs au brouillon : la preuve repose sur la vérification, pas sur la façon dont tu l'as trouvé.

Exemple · Une borne commune

Montrons qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|2x - 1| \leq M$ pour tout $x \in [-3, 2]$. Si $x \in [-3, 2]$, alors $-7 \leq 2x - 1 \leq 3$, d'où $|2x - 1| \leq 7$. Le choix $M = 7$ convient pour tout l'intervalle.

Si tu choisis $M = |2x - 1|$ après avoir fixé x , cette borne dépend de x . Tu prouves alors $\forall x, \exists M$. Ici, il fallait choisir d'abord une borne M qui convienne ensuite à tous les x de l'intervalle.

Des débuts de rédaction adaptés

Pour tout $x, P(x) \Rightarrow Q(x)$: « Soit x dans le domaine. Supposons $P(x)$. Montrons $Q(x)$. »

Il existe x tel que $P(x)$: « Posons $x = \dots$. Vérifions les conditions. »

Unicité : « Soient x, y deux objets qui satisfont les conditions. Montrons $x = y$. »

Contre-exemple : « Pour $x = \dots$, les hypothèses sont vérifiées, mais la conclusion échoue. »

Après cette première phrase, vérifie que chaque étape utilise une hypothèse annoncée ou un résultat déjà établi. La conclusion doit être celle que tu as annoncé vouloir démontrer.

Choisir la forme d'une preuve

Prouver par contraposée

Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$ sont équivalentes : elles échouent dans le même cas, lorsque P est vraie et Q fausse. La contraposée est utile si $\neg Q$ est plus facile à exploiter que P . Dans la rédaction, annonce ce changement : « Prouvons la contraposée. Supposons non Q ; montrons non P . » La conclusion revient ensuite à l'implication initiale.

Exemple · Parité

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n^2 pair entraîne n pair. La contraposée est : n impair entraîne n^2 impair. Soit n un entier impair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$; alors

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Le nombre $2k^2 + 2k$ est entier : n^2 est donc impair. La contraposée est prouvée, et l'implication initiale aussi.

Prouver par l'absurde

Pour prouver une proposition P , suppose $\neg P$, puis obtiens une contradiction avec une hypothèse ou un fait établi. Pour prouver $A \Rightarrow B$ par l'absurde, suppose simultanément A et $\neg B$.

Exemple · Il n'y a pas de plus petit réel strictement positif

Supposons qu'un tel réel a existe. On a $a > 0$, et tout réel strictement positif devrait être supérieur ou égal à a . Pourtant $a/2 > 0$ et $a/2 < a$. Cela contredit la minimalité de a ; la proposition d'existence est fausse.

Distinguer les cas

Quand l'argument dépend d'une propriété comme la parité, traite séparément toutes les possibilités. Annonce les cas, démontre la conclusion dans chacun, puis explique pourquoi ils couvrent le domaine. Pour $n \in \mathbb{Z}$, prouvons que $n(n+1)$ est pair. Si $n = 2k$, le produit vaut $2k(n+1)$; si $n = 2k+1$, alors $n+1 = 2(k+1)$ et le produit vaut $2n(k+1)$. Dans les deux cas, c'est 2 fois un entier. Tout entier étant pair ou impair, le résultat est établi.

Une expression D peut s'annuler ? Traite $D = 0$, puis $D \neq 0$ avant de diviser par D . Pour une question de signe, les cas $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$ peuvent être nécessaires.

Attention

La réciproque n'est pas la contraposée. « Supposons le contraire » doit être suivi d'une hypothèse explicite. Si la conclusion est universelle, sa négation fournit un contre-exemple, pas une négation valable pour tous les objets.

Du brouillon à une preuve lisible

Essai guidé · Trouver la justification manquante

Pour un entier impair n , cherche pourquoi $n^2 - 1$ est divisible par 8. Écrire $n = 2k + 1$ donne un facteur 4 ; qu'apporte le produit restant ?

Le brouillon peut contenir $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$. C'est la bonne expression, mais elle ne conclut pas encore : il faut démontrer que $k(k + 1)$ est pair.

Une rédaction complète

Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier impair. Par définition, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1).$$

Deux entiers consécutifs sont de parités opposées ; leur produit est donc pair. Il existe donc $m \in \mathbb{Z}$ tel que $k(k + 1) = 2m$. Ainsi $n^2 - 1 = 8m$, ce qui signifie $8 \mid (n^2 - 1)$. L'entier impair n étant arbitraire, cette divisibilité vaut pour tout entier impair.

Pourquoi écrire ces étapes ?

« Soit » fixe un objet avec les seules hypothèses autorisées. « Par définition » transforme la parité en une écriture exploitable. Le calcul fait apparaître un produit. La parité de ce produit fournit le facteur manquant. La dernière phrase revient à la définition de la divisibilité et à la portée universelle de l'énoncé.

Une rédaction plus courte pourrait dire « $k(k + 1)$ est pair car les facteurs sont deux entiers consécutifs ». Elle resterait rigoureuse une fois ce fait maîtrisé. En revanche, « donc divisible par 8 » après le seul facteur 4 omet la justification décisive.

Contrôler les dépendances

Le nombre k dépend de n , puis m dépend de k . Ils peuvent changer lorsque n change. Rien ne prétend qu'un même m convient à tous les entiers impairs.

Attention

Détaille une application de théorème, un changement de sens d'inégalité ou une justification de divisibilité. Tu pourras raccourcir un calcul que tu maîtrises, mais le lecteur doit pouvoir vérifier pourquoi chaque conclusion suit des lignes précédentes.

Test de relecture. Pour chaque « donc », nomme ce qui permet de passer de la ligne précédente à la suivante. Si tu ne peux pas le justifier, reprends ce passage avant de considérer la preuve comme terminée.

Récurrence : prouver la propagation

Récurrence simple

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété définie pour $n \geq n_0$. Si $P(n_0)$ est vraie et si, pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

L'initialisation prouve un premier cas. L'hérédité prouve une implication pour un rang arbitraire. Elle ne suppose pas que la propriété est déjà vraie à tous les rangs : ce serait supposer ce qu'on veut démontrer.

Exemple · Une somme, entièrement rédigée

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)$, avec $S_0 = 0$. Montrons par récurrence la propriété $P(n)$: « $S_n = n^2$ ».

Initialisation. $S_0 = 0 = 0^2$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire $S_n = n^2$. Montrons $P(n+1)$, c'est-à-dire $S_{n+1} = (n+1)^2$. En isolant le dernier terme de la somme,

$$S_{n+1} = S_n + (2(n+1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Le remplacement de S_n par n^2 utilise exactement l'hypothèse de récurrence. Nous avons prouvé $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour un n arbitraire.

Conclusion. Par récurrence, $S_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pourquoi la récurrence n'est-elle pas un raisonnement circulaire ?

Supposer $P(n)$ pendant l'hérédité peut donner l'impression qu'on suppose déjà ce que l'on veut prouver. Pourtant, cette étape établit seulement une implication : si la propriété vaut à un rang, elle vaut au suivant.

L'initialisation donne $P(0)$ sans hypothèse. L'implication prouvée donne alors $P(1)$, puis $P(2)$, et ainsi de suite. On ne déduit pas $P(n)$ de lui-même : on démontre que sa vérité entraîne celle du rang suivant.

Choisir une propriété assez forte

Une tentative peut exiger une information absente de $P(n)$. Si l'on doit contrôler à la fois le domaine d'une racine et une borne supérieure, prendre $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 4$ » peut être plus utile que « $u_n \leq 4$ ». Il faut alors initialiser et transmettre les deux inégalités.

Attention

Ne commence pas l'hérédité par « supposons la propriété vraie pour tout n ». Écris « Soit $n \geq n_0$; supposons $P(n)$ ». Une initialisation à n_0 et un pas de 2 n'atteignent que les rangs de même parité : il faut une seconde initialisation pour couvrir l'autre parité.

Récurrences forte et à deux rangs

Réurrence forte

On initialise $P(n_0)$. Pour un entier arbitraire $n \geq n_0$, on suppose simultanément $P(k)$ pour tous les $k \in \{n_0, \dots, n\}$, puis on démontre $P(n+1)$. On conclut $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$.

Cette forme est utile si l'objet de taille $n+1$ se décompose en objets de tailles inférieures qui ne sont pas nécessairement n . Elle n'autorise aucune propriété aux rangs supérieurs à n .

Exemple · Décomposition en nombres premiers

Montrons que tout entier $m \geq 2$ est un produit de nombres premiers. Pour $m = 2$, le produit à un facteur 2 convient.

Soit $n \geq 2$. Supposons que chaque entier de 2 à n admette une telle décomposition. Si $n+1$ est premier, c'est un produit à un facteur. Sinon, il possède un diviseur a avec $2 \leq a < n+1$; posons $b = (n+1)/a$. Les entiers a, b vérifient $2 \leq a, b \leq n$, car $a, b \geq 2$ et $ab = n+1$. L'hypothèse de récurrence s'applique donc à chacun. En réunissant les facteurs premiers de a et de b , on obtient ceux de $n+1$.

Les deux cas couvrent toutes les possibilités. La récurrence forte donne le résultat pour tout $m \geq 2$. L'unicité de cette décomposition demandera un argument différent.

Quand deux rangs précédents interviennent

Si le pas consiste à déduire $P(n+2)$ de $P(n)$ et $P(n+1)$, initialise $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$. On peut aussi appliquer une récurrence simple à $Q(n)$: « $P(n)$ et $P(n+1)$ ».

Exemple · Transmettre un couple de bornes

Soient $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = (u_n + u_{n+1})/2$. Montrons $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les deux termes initiaux conviennent. Si $u_n, u_{n+1} \in [1, 2]$, leur moyenne appartient à $[1, 2]$; le couple (u_{n+1}, u_{n+2}) convient à son tour. Par récurrence sur les couples, tous les termes appartiennent à $[1, 2]$.

Attention

Une relation définissant u_{n+2} ne suffit pas à décider seule combien d'initialisations exige ta preuve. Regarde les rangs dont dépend réellement le pas d'hérédité. Teste aussi les premiers rangs : aucune forme de récurrence ne rend vrai un énoncé faux.

Existence, unicité, applications

Priorité CGL : Indispensable. **Origine habituelle :** lycée ; langage des applications en MPSI.

Essai guidé · Deux affirmations distinctes

L'équation $x^2 = 5$ admet-elle une solution réelle ? Une seule ? Et si l'on cherche uniquement dans $[0, +\infty[$?

L'existence demande **au moins une** solution. L'unicité demande **au plus une** solution. « Il existe une unique solution » réunit les deux. Prouver que deux solutions quelconques coïncident ne garantit pas qu'une solution existe.

Sur $[0, +\infty[$, l'existence suit de la continuité de $x \mapsto x^2$ sur $[2, 3]$ et de $2^2 < 5 < 3^2$, par le théorème des valeurs intermédiaires.

Pour l'unicité, soient $a, b \geq 0$ tels que $a^2 = b^2 = 5$. Alors $(a - b)(a + b) = 0$. Comme $a + b > 0$, on obtient $a - b = 0$, donc $a = b$. Sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ sont deux solutions : changer le domaine change l'unicité.

Applications : un langage utile pour trois questions

Une application $f : E \rightarrow F$ associe à chaque $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$.

Elle est **injective** si, pour tous $x, y \in E$, $f(x) = f(y)$ entraîne $x = y$. Elle est **surjective** si, pour tout $z \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$. Elle est **bijjective** si elle vérifie les deux propriétés.

$x \mapsto x^2$ est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$: chaque $z \geq 0$ a l'antécédent $\sqrt{z}$, et deux antécédents positifs ou nuls de même carré sont égaux. De $\mathbb{R}$ vers $[0, +\infty[$, elle n'est pas injective (1 et -1 ont même image) ; de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle n'est pas surjective (-1 n'a pas d'antécédent).

Vérifier la construction et l'unicité

Un algorithme prouve l'existence si l'on démontre qu'il termine et que son résultat convient. Il ne prouve pas automatiquement l'unicité. Pour celle-ci, prends deux objets satisfaisant les conditions et cherche ce qui force leur égalité.

Ce que montre le jury · 2022

Le premier exercice demandait un travail d'existence et d'unicité pour un nombre situé entre deux entiers consécutifs. [Rapport 2022, §2.](#)

Pour ta préparation. L'exercice exigeait les deux conclusions : une construction ne dispense pas de prouver l'unicité. Sépare donc les arguments. Pour une bijection, vérifie d'une part que chaque objet est atteint, d'autre part qu'il ne possède pas deux antécédents distincts.

Pour t'entraîner. [CGL 2023, exercice 1](#) : distinguer l'apparition de tous les rationnels et l'unicité de leur apparition.

Analyse et synthèse : trouver tous les objets

Essai guidé · Ne pas s'arrêter au premier candidat

Cherche tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a + b = 7$ et $a^2 + b^2 = 25$. Trouver un couple ne prouve pas qu'il n'y en a pas d'autre.

Analyse : ce que toute solution doit vérifier

Supposons qu'un couple (a, b) satisfait les deux conditions. Alors

$$49 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 25 + 2ab,$$

d'où $ab = 12$. Comme $b = 7 - a$, on obtient $a(7 - a) = 12$, soit

$$a^2 - 7a + 12 = (a - 3)(a - 4) = 0.$$

Ainsi $a = 3$ ou $a = 4$, et respectivement $b = 4$ ou $b = 3$. Toute solution figure parmi les deux candidats $(3, 4)$ et $(4, 3)$.

Synthèse : les candidats conviennent-ils ?

Pour chacun, $a + b = 7$ et $a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$. Les deux conviennent. L'ensemble des solutions est donc $\{(3, 4), (4, 3)\}$. Avec la condition supplémentaire $a \leq b$, seul $(3, 4)$ subsiste.

L'analyse part d'un objet supposé solution et réduit les possibilités. La synthèse part des candidats et vérifie les conditions initiales. Elle est particulièrement utile si l'analyse comporte une transformation non réversible.

Chercher ce qui permettrait de conclure

Chercher ce qui suffirait à obtenir la conclusion peut faire trouver une preuve. Sur la copie, il reste à partir d'un fait établi. Une égalité finale souhaitée n'est pas une hypothèse disponible. Relis la chaîne pour vérifier que chaque étape suit de la précédente, ou annonce explicitement une chaîne d'équivalences justifiées.

Égalité d'ensembles : deux inclusions

Pour prouver $A = B$, prends un élément arbitraire de A et montre qu'il appartient à B ; puis prends un élément arbitraire de B et montre qu'il appartient à A . Tu as établi $A \subset B$ et $B \subset A$.

Par exemple, $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\} = [-2, 2]$: la condition $x^2 \leq 4$ donne $|x| \leq 2$, donc $x \in [-2, 2]$; inversement, $x \in [-2, 2]$ donne $|x| \leq 2$, puis $x^2 \leq 4$. Les deux directions ont été vérifiées.

À retenir. « Tout objet qui convient est dans ma liste » et « chaque objet de ma liste convient » sont deux obligations distinctes.

Ensembles de nombres : prouver une appartenance

Priorité CGL : Indispensable. **Origine habituelle :** Seconde ; raisonnement approfondi au lycée.

Dire qu'une valeur est entière, rationnelle ou réelle peut ouvrir des méthodes différentes. Une solution réelle d'une équation n'est pas forcément une solution entière ; la nature du nombre fait partie des conditions à vérifier.

Les ensembles utilisés dans ce cours

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Q} = \{a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\}$ est l'ensemble des rationnels.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, représentés par les points de la droite graduée. Sa construction est admise ici. Un réel est **irrationnel** s'il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Les inclusions sont $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Elles sont strictes : $-1 \notin \mathbb{N}$, $1/2 \notin \mathbb{Z}$ et $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$. La dernière affirmation sera démontrée dans le [chapitre d'arithmétique](#).

Revenir à une écriture qui caractérise le nombre

Pour prouver qu'une expression est entière, réécris-la à l'aide d'entiers et d'opérations qui préservent l'intégralité, ou démontre une divisibilité. Ainsi, pour $n \in \mathbb{Z}$, $n/2 \in \mathbb{Z}$ si et seulement si n est pair : cela signifie exactement qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.

Pour prouver qu'un réel est rationnel, donne une écriture a/b avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Pour prouver qu'il est irrationnel, suppose qu'une telle écriture existe et cherche une contradiction. Il est souvent utile de prendre une fraction irréductible ; nous justifierons ce choix avec le PGCD.

Essai guidé · Le carré détermine-t-il la nature du nombre ?

Un réel x tel que $x^2 \in \mathbb{Z}$ est-il nécessairement entier ? Est-il nécessairement rationnel ? Cherche un contre-exemple avant de lire la suite.

Le nombre $\sqrt{7}$ a un carré entier et pourtant il est irrationnel. En revanche, si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x^2 \in \mathbb{Z}$. Le sens de l'implication compte autant que l'ensemble considéré.

Opérations sur les rationnels

Si $x = a/b$ et $y = c/d$ avec $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{N}^*$, alors

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd}, \quad xy = \frac{ac}{bd}$$

sont rationnels. Si $y \neq 0$, alors $c \neq 0$ et $x/y = ad/(bc)$ est aussi rationnel ; un dénominateur négatif peut être rendu positif en changeant les deux signes. Une division par un entier non nul conserve donc la rationalité, mais pas nécessairement l'intégralité.

Intervalles et conditions sur un réel

Une condition d'appartenance à un intervalle se traduit en inégalités. Cette traduction permet de vérifier un domaine, de transmettre des bornes dans une récurrence ou de décrire l'ensemble des solutions.

Lire les bornes et les crochets

Pour $a < b$, les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} x \in [a, b] &\iff a \leq x \leq b & x \in]a, b[&\iff a < x < b, \\ x \in [a, b[&\iff a \leq x < b & x \in]a, b] &\iff a < x \leq b. \end{aligned}$$

De même, $x \in [a, +\infty[$ signifie $x \geq a$; $x \in]-\infty, b[$ signifie $x < b$. Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels : leurs crochets restent ouverts. On a $[a, a] = \{a\}$ et $]a, a[= \emptyset$.

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si, pour tous $u, v \in I$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $u \leq x \leq v$ entraîne $x \in I$.

Combiner des conditions

L'intersection $A \cap B$ contient les éléments qui sont dans A et dans B ; la réunion $A \cup B$ ceux qui sont dans A ou dans B , éventuellement les deux. Ainsi, $x \in [-2, 3]$ et $x > 0$ équivaut à $x \in]0, 3]$.

Pour définir $\sqrt{x+1}/(x-2)$ dans $\mathbb{R}$, il faut $x \geq -1$ et $x \neq 2$. Son domaine est donc $[-1, 2[\cup]2, +\infty[$. Cette réunion n'est pas un intervalle : elle contient 1 et 3, mais pas le réel 2 situé entre eux.

Prouver qu'une expression appartient à un intervalle

Pour une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, son image est $g(I) = \{g(x) : x \in I\}$. Pour prouver $g(I) \subset [c, d]$, fixe $x \in I$ arbitraire et montre $c \leq g(x) \leq d$. Les calculs doivent utiliser les conditions sur x . Par exemple, pour $g(x) = (2x+1)/3$ et $x \in [-2, 1]$,

$$-4 \leq 2x \leq 2, \quad -3 \leq 2x+1 \leq 3, \quad -1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 1.$$

On a donc $g([-2, 1]) \subset [-1, 1]$. Vérifier seulement les valeurs aux extrémités ne suffirait pas pour une fonction quelconque.

Attention

$x \in A$ porte sur un élément ; $A \subset B$ porte sur deux ensembles et signifie que tout élément de A appartient à B . Pour prouver une inclusion, prends un élément arbitraire du premier ensemble et vérifie les conditions du second.

On peut aussi imposer une condition de nature : $\mathbb{Z} \cap]-1, 3[= \{0, 1, 2\}$. L'intervalle contient tous les réels entre ses bornes ; l'intersection ne garde ici que les entiers.

3 · Suites et récurrences

Priorité CGL : Indispensable. **Origine habituelle :** Terminale spécialité ; approfondissements MPSI.

Une suite est une application de $\mathbb{N}$ vers un ensemble, ici le plus souvent $\mathbb{R}$. Une formule explicite donne u_n directement ; une récurrence donne des termes à partir des précédents. Dans le second cas, la première question est parfois de savoir si tous les termes existent.

Monotonie et bornes

Une suite réelle est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ; décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$. Elle est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n , minorée s'il existe une borne inférieure analogue, bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Pour comparer deux termes, calcule leur différence. Un quotient est utile si le signe du dénominateur est connu : pour $u_n > 0$, $u_{n+1} \geq u_n$ équivaut à $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Sans cette positivité, le raisonnement change.

Convergence vers un réel

La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le rang N peut dépendre de ε , mais doit ensuite convenir à tous les $n \geq N$. La limite, lorsqu'elle existe, est unique.

Pour l'unicité, si deux limites $\ell \neq m$ existaient, choisis $\varepsilon = |\ell - m|/3$. Les deux définitions de limite fournissent des seuils N_ℓ, N_m pour cette même précision. Pour $n \geq \max(N_\ell, N_m)$, l'inégalité triangulaire donnerait $|\ell - m| \leq |\ell - u_n| + |u_n - m| < 2|\ell - m|/3$, contradiction.

Ce que suggèrent les premiers termes

Ils peuvent suggérer une borne, une monotonie ou plusieurs comportements selon l'initialisation. Ils ne garantissent ni le comportement futur ni la convergence. La suite $(-1)^n$ est bornée mais ne converge pas : ses termes pairs valent 1 et ses termes impairs -1 .

Pour t'entraîner. CGL 2021, exercice 1, CGL 2024, exercice 1, CGL 2025, exercice 2 ; commence par les questions d'existence et de comparaison.

Lire et utiliser une définition de limite

La définition de $u_n \rightarrow \ell$ décrit une garantie : quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ demandée, on peut trouver un rang après lequel *tous* les termes sont à distance strictement inférieure à ε de ℓ .

La précision, le seuil, puis les rangs à contrôler

- 1. La précision :** fixe un réel $\varepsilon > 0$ arbitraire.
- 2. Le seuil :** construis un entier N , éventuellement dépendant de ε .
- 3. Tous les rangs suivants :** pour un entier arbitraire $n \geq N$, démontre $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Le seuil ne peut pas dépendre du rang n choisi ensuite. Obtenir une précision à un seul rang, ou à une infinité de rangs isolés, ne donne pas cette garantie.

Essai guidé · Trouver une condition suffisante sur le rang

Pour $u_n = 3 + 2/(n+1)$, quelle condition sur n suffit à rendre $|u_n - 3| < \varepsilon$? Cherche d'abord une inégalité, puis choisis un seuil entier.

Au brouillon, on obtient $2/(n+1) < \varepsilon$ dès que $n+1 > 2/\varepsilon$. Un choix possible est $N = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x . La définition de la partie entière donne $N+1 > 2/\varepsilon$.

La preuve dans le bon sens

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $n \geq N$, on a $n+1 \geq N+1 > 2/\varepsilon$. Ces nombres étant strictement positifs, l'inversion donne

$$|u_n - 3| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

Nous avons obtenu un même seuil pour tous les rangs suivants. Ainsi $u_n \rightarrow 3$. Pour $\varepsilon = 10^{-2}$, le choix $N = 200$ convient ; il n'est pas nécessaire de trouver le plus petit seuil possible.

Ce que signifie ne pas tendre vers un réel donné

En niant la définition pour un ℓ fixé, on obtient

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

Une précision positive reste impossible à garantir, aussi loin que l'on démarre. Par exemple, $(-1)^n$ ne tend pas vers 1 : pour chaque N , on trouve un rang impair $n \geq N$, avec $|(-1)^n - 1| = 2 \geq 1$.

Attention

Les hypothèses d'un théorème de convergence remplacent souvent ce travail explicite sur ε . Elles doivent alors être démontrées. Un dessin ou quelques erreurs numériques petites ne fournissent ni un seuil valable pour tous les rangs suivants ni ces hypothèses.

Chercher · Une récurrence avec une racine

On pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Calcule trois termes. Propose un intervalle contenant tous les termes, puis une conjecture sur leur ordre. Cherche avant la page suivante, sans calculer une limite.

Prouver que les termes restent dans un intervalle

Pour la suite proposée à la page précédente, on obtient $u_1 = 2$, $u_2 = \sqrt{10}$ et $u_3 = \sqrt{3\sqrt{10} + 4}$. Ces valeurs suggèrent une croissance et une borne 4.

Intervalle invariant

Pour une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, un intervalle I est invariant par f si f est définie sur I et $f(I) \subset I$. Si $u_0 \in I$, la récurrence montre que tous les termes existent et appartiennent à I .

Ici, posons $f(x) = \sqrt{3x + 4}$, définie pour $x \geq -4/3$. Si $x \in [0, 4]$, alors $4 \leq 3x + 4 \leq 16$, donc $f(x) \in [2, 4] \subset [0, 4]$. Initialisons avec $u_0 = 0 \in [0, 4]$. Si $u_n \in [0, 4]$, alors $3u_n + 4 \geq 4$: u_{n+1} existe et appartient encore à $[0, 4]$. Par récurrence, tous les termes existent et $0 \leq u_n \leq 4$ pour tout n .

Deux façons de prouver la croissance

La fonction $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ est croissante sur $[0, 4]$. Puisque $u_1 \geq u_0$, l'implication

$$u_{n+1} \geq u_n \implies f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \implies u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

propage la comparaison par récurrence.

On peut aussi comparer $f(x)$ à x sur l'intervalle. Les deux sont positifs ou nuls, donc

$$f(x) \geq x \iff 3x + 4 \geq x^2 \iff (4 - x)(x + 1) \geq 0.$$

Cette dernière inégalité est vraie sur $[0, 4]$; on l'applique à $x = u_n$.

Attention

Le fait que f soit croissante ne suffit pas à dire que (u_n) est croissante. Il faut une première comparaison, ou étudier le signe de $f(x) - x$. Par exemple $u_{n+1} = u_n/2$ avec $u_0 = 1$ donne une suite décroissante.

Prouver la convergence, puis identifier la limite

Deux théorèmes du socle

Une suite réelle croissante et majorée converge vers un réel ; une suite décroissante et minorée aussi.

Si $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang et si $a_n \rightarrow \ell$ et $b_n \rightarrow \ell$, alors $u_n \rightarrow \ell$: c'est le théorème des gendarmes.

Ces théorèmes du cours de Terminale sont employés ici avec leurs hypothèses. Le premier repose sur la complétude de $\mathbb{R}$. Pour le second, à partir d'un rang commun, $\ell - \varepsilon < a_n \leq u_n \leq b_n < \ell + \varepsilon$.

Reprendre le fil conducteur

La suite précédente est croissante et majorée par 4 ; elle converge donc vers un réel $\ell \in [0, 4]$. Par continuité de la racine carrée et par décalage des indices,

$$\ell = \sqrt{3\ell + 4}.$$

Avec $\ell \geq 0$, on obtient $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, donc $(\ell - 4)(\ell + 1) = 0$. La valeur -1 est exclue : $\ell = 4$.

Le passage au point fixe

Si $u_{n+1} = f(u_n)$, si $u_n \rightarrow \ell$ et si f est continue en ℓ , alors $\ell = f(\ell)$. Il faut que ℓ appartienne au domaine de f ; appartenir à un intervalle ouvert invariant ne le garantit pas à lui seul.

Attention

Résoudre $\ell = f(\ell)$ donne des *limites possibles*, pas une preuve de convergence. Pour $u_{n+1} = 2u_n$, $u_0 = 1$, le seul point fixe est 0, mais $u_n = 2^n$ diverge vers $+\infty$.

Ce que montre le jury - 2024

Le premier exercice étudiait une suite selon son terme initial. Le rapport signale une forte participation à cet exercice, sans traitement exhaustif, et des difficultés dès la question 4. Cette question identifiait une limite sous hypothèse de convergence. [Rapport 2024, §2 ; sujet, exercice 1.](#)

Pour ta préparation. Cette difficulté porte sur une étape où il faut utiliser exactement l'hypothèse donnée. Distingue donc « si la suite converge, que vaut sa limite ? » de « la suite converge-t-elle ? ». Dans le premier cas, utilise les bornes pour éliminer un point fixe impossible ; dans le second, démontre d'abord la convergence, par un théorème dont tu vérifies les hypothèses ou par un encadrement adapté.

Introduire une suite auxiliaire

Essai guidé · Soustraire une constante

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{8}{5}$. Trouve une constante L qui vérifie la même relation. Quelle relation obtient-on pour $u_n - L$?

L'équation $L = \frac{3}{5}L + \frac{8}{5}$ donne $L = 4$. En posant $v_n = u_n - 4$, on obtient $v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$, puis

$$u_n = 4 + (u_0 - 4) \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

La translation fait disparaître le terme constant. Si $u_0 < 4$, tous les termes sont inférieurs à 4 ; si $u_0 > 4$, ils sont supérieurs à 4 ; si $u_0 = 4$, ils valent tous 4. La valeur $|u_0 - 4|$ donne l'erreur initiale.

Complément facultatif : transformer un quotient

Considérons maintenant $u_0 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

La positivité se propage : numérateur et dénominateur sont strictement positifs. Les points fixes sont 1 et -1 . Essayons de mesurer la position de u_n par rapport à ces deux valeurs :

$$z_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

Comme $u_n > 0$, on a $u_n + 1 > 0$: le quotient est défini. Pour vérifier si cette transformation simplifie la récurrence, exprimons le quotient au rang suivant :

$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{(u_n - 1)/(u_n + 2)}{3(u_n + 1)/(u_n + 2)} = \frac{1}{3} \frac{u_n - 1}{u_n + 1}.$$

Ainsi $z_n = 3^{-n}z_0$. Puisque $u_0 > 0$, $|z_0| < 1$; l'inversion est permise et donne

$$u_n = \frac{1 + 3^{-n}z_0}{1 - 3^{-n}z_0} \rightarrow 1.$$

Reconnaître l'occasion

Une récurrence affine invite à soustraire son point fixe. Une récurrence homographique peut inviter à former un quotient de différences aux points fixes. Ce sont des pistes de recherche : vérifie le calcul, les dénominateurs et la possibilité de revenir à la suite initiale.

Jusqu'où aller. Savoir essayer une différence, un quotient ou une somme auxiliaire. Il n'est pas nécessaire d'apprendre une classification générale des récurrences homographiques.

Quand les termes oscillent

Essai guidé · Comparer les termes pairs et impairs

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = (x+6)/(x+2)$. Les premiers termes sont 1, $7/3$, $25/13$. Compare séparément les termes pairs et les termes impairs.

Sur $[1, 3]$, $f'(x) = -4/(x+2)^2 < 0$ et $f([1, 3]) = [9/5, 7/3] \subset [1, 3]$. Tous les termes existent donc dans cet intervalle.

La fonction est décroissante : elle inverse les comparaisons. En revanche, deux applications successives préservent leur sens. Calculons

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{7x+18}{3x+10}, \quad g(x) - x = \frac{3(2-x)(x+3)}{3x+10}.$$

De plus, $g'(x) = 16/(3x+10)^2 > 0$ et $g(2) = 2$. Sur $[1, 2]$, $x \leq g(x) \leq 2$; sur $[2, 3]$, $2 \leq g(x) \leq x$.

Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 7/3$, les termes pairs forment une suite croissante majorée par 2, les termes impairs une suite décroissante minorée par 2. Notons leurs limites a et b . Les deux suites suivent la récurrence de fonction g ; par continuité, $g(a) = a$ et $g(b) = b$.

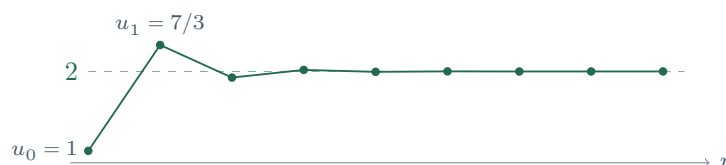
L'équation $g(x) = x$ est $(x-2)(x+3) = 0$. Dans $[1, 3]$, sa seule solution est 2. On a donc $a = b = 2$. Pour $\varepsilon > 0$, choisissons un seuil commun K tel que $|u_{2k} - 2| < \varepsilon$ et $|u_{2k+1} - 2| < \varepsilon$ pour tout $k \geq K$. Tout $n \geq 2K$ est de l'une de ces deux formes avec $k \geq K$. Ainsi $u_n \rightarrow 2$.

Suites adjacentes

Si (a_n) est croissante, (b_n) décroissante, $a_n \leq b_n$ pour tout n et $b_n - a_n \rightarrow 0$, elles convergent vers une même limite. En effet, elles sont respectivement majorée par b_0 et minorée par a_0 ; leurs limites ont une différence nulle.

Attention

Une fonction décroissante n'impose pas la convergence. La récurrence $u_{n+1} = 1 - u_n$, $u_0 = 0$, alterne entre 0 et 1. Il faut encore rapprocher les deux sous-suites.



Les termes pairs approchent 2 par dessous, les termes impairs par dessus. Le dessin suggère ce que les deux récurrences ont démontré.

Erreur, terme initial et paramètre

La convergence ne dit pas à quelle vitesse les termes s'approchent de la limite. Une inégalité sur l'erreur peut donner une borne utilisable à chaque rang.

Un encadrement itéré

Reprenons $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. La borne $u_n \leq 4$ permet de poser $e_n = 4 - u_n \geq 0$. En rationalisant,

$$e_{n+1} = \frac{16 - (3u_n + 4)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{3e_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{2}e_n,$$

car $u_n \geq 0$ et la racine vaut au moins 2. Au rang 0, $e_0 = 4$. Si $e_n \leq 4 \cdot 2^{-n}$, alors $e_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times 4 \cdot 2^{-n} = 4 \cdot 2^{-(n+1)}$. La récurrence établit donc

$$0 \leq 4 - u_n \leq 4 \cdot 2^{-n}.$$

À partir de $n = 12$, cette borne est inférieure à 10^{-3} . Il s'agit d'une garantie démontrée, même si l'erreur réelle peut être plus petite.

Comparer des termes initiaux et des paramètres

Pour $0 < a \leq 1$ et $0 < u_0 < 1$, posons $u_{n+1} = f_a(u_n)$, où $f_a(x) = x + ax(1-x)$. Sur $[0, 1]$,

$$f_a(x) \geq x, \quad 1 - f_a(x) = (1-x)(1-ax) \geq 0.$$

L'intervalle est invariant ; la suite est croissante et majorée par 1. Par continuité de f_a , sa limite ℓ vérifie $a\ell(1-\ell) = 0$. Comme $\ell \geq u_0 > 0$, on obtient $\ell = 1$. Mais si $u_0 = 0$, tous les termes valent 0.

Pour comparer deux termes initiaux avec le même a , on utilise $f'_a(x) = 1 + a - 2ax \geq 1 - a \geq 0$. Si $u_n \leq v_n$, alors $f_a(u_n) \leq f_a(v_n)$: l'ordre initial se propage par récurrence.

Pour $0 < a \leq b \leq 1$, comparons $u_{n+1} = f_a(u_n)$ et $v_{n+1} = f_b(v_n)$ avec $u_0 = v_0 \in (0, 1)$. Tous les termes sont dans $[0, 1]$. Si $u_n \leq v_n$, la croissance de f_a puis $f_a(x) \leq f_b(x)$ donnent

$$u_{n+1} = f_a(u_n) \leq f_a(v_n) \leq f_b(v_n) = v_{n+1}.$$

L'égalité initiale et cette implication prouvent $u_n \leq v_n$ pour tout n .

Attention

Le rang à partir duquel une précision est garantie peut dépendre de a et du terme initial. Pour obtenir un rang commun à plusieurs valeurs du paramètre, il faut une borne valable pour toutes ces valeurs.

Pour t'entraîner. CGL 2024, exercice 1 pour comparer des initialisations ; CGL 2026, exercice 1 pour encadrer des produits récurrents.

Chercher · Teste ce que tu sais retrouver · 1

Soient $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = (u_n + 2)/3$. Donne un rang N tel que $|u_n - 1| < 10^{-4}$ pour tous $n \geq N$, valable pour tous les termes initiaux de cet intervalle. Réponse, p. 61.

Divisibilité et restes des termes d'une suite

Priorité CGL : Très rentable. **Origine habituelle :** Maths expertes ; préparation olympique.

Essai guidé · Observer modulo un petit entier

Soit $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$. Calcule les quatre premiers termes, puis remplace chaque terme par son reste modulo 3. Que semble-t-il se passer ?

Les termes commencent par 2, 7, 57, 3307. Leurs restes modulo 3 sont 2, 1, 0, 1. La croissance des nombres peut masquer une structure très simple sur leurs restes.

Deux propriétés prouvées

Un diviseur commun de a_n et a_{n+1} divise

$$a_{n+1} - a_n(a_n + 1) = 1.$$

Les termes consécutifs sont donc premiers entre eux. Ici, la relation de récurrence fournit directement une combinaison entière égale à 1.

Pour les restes modulo 3, la transformation $r \mapsto r^2 + r + 1$ envoie 0 sur 1, 1 sur 0 et 2 sur 1. Après le premier terme, les restes alternent : $a_n \equiv 1 \pmod{3}$ pour n impair et $a_n \equiv 0 \pmod{3}$ pour $n \geq 2$ pair. Une récurrence sur les rangs justifie ce schéma.

Convergence d'une suite entière

Une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui converge dans $\mathbb{R}$ est constante à partir d'un certain rang. Si sa limite est ℓ , choisis un rang à partir duquel $|u_n - \ell| < 1/3$. Pour deux indices au-delà de ce rang, $|u_n - u_m| < 2/3$; cette différence entière doit être nulle.

Une suite entière bornée n'est pas nécessairement convergente : $(-1)^n$ reste un contre-exemple.

Complément facultatif : états finis et périodicité

Soit E un ensemble fini non vide, $f : E \rightarrow E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in E$. Parmi les $|E| + 1$ premiers termes, deux états se répètent : $u_i = u_j$ avec $i < j$. Si $u_{i+k} = u_{j+k}$, appliquer f donne $u_{i+k+1} = u_{j+k+1}$. Par récurrence, $u_{i+k} = u_{j+k}$ pour tout $k \geq 0$: la suite est périodique à partir du rang i , de période $j - i$.

Si la règle dépend périodiquement du rang, de période $p \in \mathbb{N}^*$, ajoute le reste du rang modulo p à l'état. Tu obtiens une règle sur l'ensemble fini $E \times \{0, \dots, p-1\}$. Sans cette dépendance périodique, l'argument ne s'applique pas tel quel.

Jusqu'où aller. Savoir suivre des restes, exploiter une combinaison de termes et introduire une suite auxiliaire. Les récurrences arithmétiques très spécialisées ne constituent pas un préalable au CGL.

4 · Arithmétique et nombres

Priorité CGL : Très rentable. **Origine habituelle :** Maths expertes ; préparation olympique.

Tu peux commencer les annales sans avoir terminé Maths expertes. Ces outils deviennent surtout rentables quand une question demande de contrôler des diviseurs, une fraction irréductible ou des restes.

Divisibilité et PGCD

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on écrit $a \mid b$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ak$. Tout entier divise 0 ; 0 ne divise que 0.

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ non tous deux nuls, leur PGCD est le plus grand entier positif qui divise les deux. On le note $\text{PGCD}(a, b)$. Ils sont premiers entre eux si ce PGCD vaut 1.

Si d divise a et b , il divise $ra + sb$ pour tous $r, s \in \mathbb{Z}$. Cette propriété peut donner un entier plus petit à partir des expressions de départ, parfois 1.

Algorithme d'Euclide

Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, la division euclidienne fournit des uniques $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, \dots, b-1\}$ tels que $a = bq + r$. Les diviseurs communs de a, b sont exactement ceux de b, r : ils divisent $r = a - bq$, et réciproquement $a = bq + r$.

On peut donc remplacer (a, b) par (b, r) tant que $r \neq 0$. Les restes positifs décroissent strictement ; le procédé termine. À la première division de reste nul, le diviseur est le PGCD, même si ce reste nul apparaît dès la première étape.

Exemple · Calculer puis remonter

$$119 = 85 + 34, \quad 85 = 2 \times 34 + 17, \quad 34 = 2 \times 17.$$

Ainsi $\text{PGCD}(119, 85) = 17$. En remontant,

$$17 = 85 - 2 \times 34 = 3 \times 85 - 2 \times 119.$$

La dernière égalité exprime le PGCD comme combinaison entière des deux nombres.

Essai guidé · Une fraction irréductible

Pour $n \in \mathbb{N}$, montre que $(8n + 3)/(5n + 2)$ est irréductible. Plutôt que de calculer le PGCD pour chaque n , cherche une combinaison des deux expressions qui élimine n .

En effet, $5(8n + 3) - 8(5n + 2) = -1$; tout diviseur commun positif divise 1 et vaut donc 1.

Jusqu'où aller. Maîtriser les combinaisons entières et l'algorithme d'Euclide avant des théorèmes plus spécialisés.

Bézout et le lemme de Gauss

Théorème de Bézout

Pour deux entiers a, b non tous deux nuls, si $d = \text{PGCD}(a, b)$, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$. En particulier, a, b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

Preuve. L'ensemble des combinaisons $au + bv$ strictement positives est non vide : il contient $|a|$ ou $|b|$ lorsqu'ils sont non nuls. Comme toute partie non vide de $\mathbb{N}^*$ possède un minimum, notons d_0 son plus petit élément. Divisons a par d_0 : le reste $r = a - qd_0$ est encore une combinaison de a, b . S'il était positif, il contredirait la minimalité de d_0 ; il est donc nul. De même $d_0 \mid b$. Tout diviseur commun de a, b divise d_0 ; ainsi d_0 est leur PGCD. Si le PGCD vaut 1, l'identité donne une combinaison égale à 1. Réciproquement, une telle combinaison impose que tout diviseur commun positif divise 1, donc que le PGCD soit 1.

Lemme de Gauss

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $a \mid bc$ et $\text{PGCD}(a, b) = 1$, alors $a \mid c$.

Par Bézout, $au + bv = 1$. En multipliant par c , on obtient $auc + bvc = c$; les deux termes de gauche sont divisibles par a , donc c aussi.

Exemple · Ce qu'on peut simplifier

Si $7 \mid 10m$, alors $7 \mid m$, puisque 7 et 10 sont premiers entre eux. Mais $6 \mid 3m$ n'entraîne pas $6 \mid m$: prends $m = 2$. La coprimauté est l'hypothèse qui autorise la simplification.

Une conséquence pour les produits

Si a, b sont des entiers positifs premiers entre eux et divisent tous deux c , alors $ab \mid c$. Écris $c = ak$. Puisque $b \mid ak$, Gauss donne $b \mid k$; d'où $c = abl$. Sans coprimauté, la conclusion peut échouer : $4 \mid 12$ et $6 \mid 12$, mais $24 \nmid 12$.

Attention

« Aucun petit diviseur commun n'a été trouvé » ne prouve pas que le PGCD vaut 1. Une combinaison égale à 1, une application de Gauss ou une décomposition en facteurs premiers apporte une preuve.

Pour t'entraîner. CGL 2025, exercice 1, question 6 : exploite les expressions données. Dans CGL 2024, problème 3, question 18, Bézout donne une voie courte ; le lemme établi à la question 15 permet aussi de conclure sans connaître ce théorème.

Calculer avec des congruences

Définition et opérations

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod{m}$ signifie $m \mid (a - b)$. Si $a \equiv b$ et $c \equiv d$ modulo m , alors $a + c \equiv b + d$ et $ac \equiv bd$ modulo m . Les puissances entières d'exposant positif se transmettent donc aussi.

La différence de deux produits se réécrit $ac - bd = a(c - d) + d(a - b)$, ce qui prouve la règle. Réduis souvent : travailler avec les restes évite des calculs de puissances inutiles.

Exemple · Un cycle

Modulo 7, les puissances de 2 suivent 2, 4, 1, 2, 4, 1, ..., car $2^3 \equiv 1$. Comme $2026 = 3 \times 675 + 1$, $2^{2026} \equiv 2 \pmod{7}$.

Diviser est une autre question

De $ca \equiv cb \pmod{m}$, on ne déduit pas toujours $a \equiv b$. Modulo 6, $2 \times 1 \equiv 2 \times 4$, mais $1 \not\equiv 4$. Si $\text{PGCD}(c, m) = 1$, Gauss appliqué à $m \mid c(a - b)$ permet cette simplification.

Complément facultatif : inverse modulo m

Pour $m \geq 2$, un entier c admet un inverse modulo m si et seulement si $\text{PGCD}(c, m) = 1$. Bézout donne alors $uc + vm = 1$, donc $uc \equiv 1 \pmod{m}$. Réciproquement, $uc \equiv 1$ fournit une combinaison égale à 1. Un inverse est ici un entier u tel que $uc \equiv 1 \pmod{m}$; il ne s'agit pas du réel $1/c$.

Par exemple $8 \times 5 = 40 \equiv 1 \pmod{13}$; résoudre $8x \equiv 6 \pmod{13}$ revient à $x \equiv 30 \equiv 4 \pmod{13}$.

Éliminer une possibilité

Les carrés valent 0 ou 1 modulo 4, puisque les entiers sont pairs ou impairs. L'équation $x^2 + y^2 = 4k + 3$ n'a donc aucune solution entière : la somme des deux restes vaut 0, 1 ou 2, jamais 3.

Jusqu'où aller. Savoir choisir 2, 3, 4, 8 ou un module lié à l'énoncé ; chercher des cycles. Le petit théorème de Fermat, rencontré en Maths expertes, est utile ponctuellement, mais sa mémorisation ne remplace pas le choix du bon module.

Pour t'entraîner. CGL 2026, exercice 2, questions 12 à 15 : le sujet construit progressivement ses contraintes sur les sommes de puissances.

Chercher · Une somme de racines

Comment prouver que $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ est irrationnel ? Écris un essai avant de poursuivre à la page suivante.

Premiers, rationnels, irrationnels

Le strict nécessaire sur les nombres premiers

Un entier $p \geq 2$ est premier si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p . Tout entier $n \geq 2$ est produit de nombres premiers, de façon unique à l'ordre des facteurs près.

L'existence a été prouvée par récurrence forte. Pour l'unicité, un premier p qui divise un produit divise au moins un facteur : s'il ne divise pas le premier, il est premier avec lui et Gauss s'applique au produit restant. On identifie ainsi un facteur dans deux décompositions, on le simplifie et on recommence.

Pour tester si $n \geq 2$ est premier, il suffit d'essayer les diviseurs premiers au plus égaux à $\sqrt{n}$: si $n = ab$ avec $a, b \geq 2$, au moins l'un des deux est au plus $\sqrt{n}$ et possède un diviseur premier.

Fractions irréductibles

Comme dans le rappel des ensembles de nombres, écris un rationnel sous la forme a/b , avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. En divisant les deux entiers par leur PGCD, on obtient une écriture irréductible : le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux. Cette condition permet de transformer une divisibilité simultanée en contradiction.

Exemple · Prouver une irrationalité

Supposons $\sqrt{7} = a/b$ en écriture irréductible. Alors $a^2 = 7b^2$. Comme 7 est premier, $7 \mid a^2$ entraîne $7 \mid a$. Écrivons $a = 7c$; l'égalité devient $b^2 = 7c^2$, donc $7 \mid b$, contradiction.

Reprenons la somme $\sqrt{7} + \sqrt{2}$. Si elle valait un rationnel r , son carré donnerait $r^2 = 9 + 2\sqrt{14}$, donc $\sqrt{14} \in \mathbb{Q}$. Or une fraction irréductible a/b de carré 14 conduirait à $7 \mid a$, puis, après $a = 7c$, à $7c^2 = 2b^2$. Gauss donne $7 \mid b^2$ puisque $\text{PGCD}(7, 2) = 1$; la primalité de 7 donne $7 \mid b$, ce qui contredit l'irréductibilité.

Attention

Sommer ou multiplier deux irrationnels ne garantit pas un irrationnel : $\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = 0$ et $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$. Il faut un raisonnement propre aux nombres considérés.

Chercher · Teste ce que tu sais retrouver · 2

Un réel $t > 0$ vérifie $t + 1/t = 16$. Est-il nécessairement rationnel ? Justifie ta réponse. **Réponse**, p. 61.

Partie entière et partie fractionnaire

Essai guidé · Arrondir vers le bas

Quel entier k vérifie $k \leq -2,3 < k+1$? Pourquoi tronquer les décimales ne donne-t-il pas cet entier ?

Définitions

Pour $x \in \mathbb{R}$, sa partie entière $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier k tel que $k \leq x < k+1$. Sa partie fractionnaire est $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$. Ainsi $\lfloor -2,3 \rfloor = -3$ et $\{-2,3\} = 0,7$.

Si $m \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$. Si $x \leq y$, alors $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. En revanche, la partie fractionnaire n'est pas une fonction croissante sur $\mathbb{R}$: $\{0,9\} > \{1,1\}$.

Une retenue de 0 ou de 1

Écrivons $x = a + r$, $y = b + s$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $r, s \in [0, 1[$. Alors

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor r + s \rfloor,$$

où $\lfloor r + s \rfloor \in \{0, 1\}$. Il est donc faux de distribuer systématiquement la partie entière sur une somme.

Fabriquer un encadrement rationnel

Pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $p = \lfloor qx \rfloor$,

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}.$$

L'écart à p/q est strictement inférieur à $1/q$. Le choix de q donne une précision ; il ne donne pas nécessairement la meilleure approximation possible.

Ce que montre le jury · 2024

Le rapport décrit le troisième exercice, sur des ensembles de multiples, comme difficile dès son début. Le sujet fournit les définitions des parties entière et fractionnaire, puis les utilise avec des opérations sur les ensembles. [Rapport 2024](#), §2.

Pour ta préparation. Les définitions sont fournies ; la difficulté consiste à en tirer des relations précises. Traduis une partie entière en deux inégalités, puis cherche à les combiner. Pour une égalité d'ensembles, vérifie séparément les deux inclusions en partant d'un élément arbitraire.

Pour t'entraîner. [CGL 2024](#), exercice 3 et [CGL 2026](#), exercice 1, partie II. Les inégalités strictes aux extrémités demandent une attention particulière.

Équations diophantiennes élémentaires

Priorité CGL : Complément facultatif. **Origine habituelle :** Maths expertes ; préparation olympique.

Une équation diophantienne demande des solutions entières. Résoudre d'abord dans $\mathbb{R}$ peut donner une forme générale, mais ne vérifie pas encore que les valeurs obtenues sont entières.

Équation linéaire

Soient a, b deux entiers non nuls et $c \in \mathbb{Z}$. L'équation $ax + by = c$, avec $x, y \in \mathbb{Z}$, admet une solution si et seulement si $d = \text{PGCD}(a, b)$ divise c .

Si (x_0, y_0) est une solution, toutes les solutions sont

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Preuve. Toute combinaison $ax + by$ est divisible par d : la condition est nécessaire. Si $c = dk$, multiplier une identité de Bézout par k fournit une solution.

Pour décrire les autres, soustrais deux équations et divise par d :

$$\frac{a}{d}(x - x_0) = -\frac{b}{d}(y - y_0).$$

Les entiers $a/d, b/d$ sont premiers entre eux. Gauss montre que b/d divise $x - x_0$; on écrit ce dernier $(b/d)t$, puis on obtient $y - y_0 = -(a/d)t$. La substitution vérifie la réciproque.

Exemple · Ajouter une contrainte de signe

Cherchons $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $7x + 11y = 100$. La solution $(8, 4)$ convient. Toutes les solutions entières sont

$$x = 8 + 11t, \quad y = 4 - 7t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

La non-négativité impose $t \geq -8/11$ et $t \leq 4/7$. Le seul entier de cet intervalle est 0. La seule solution dans $\mathbb{N}^2$ est donc $(8, 4)$.

Attention

Trouver une solution ne décrit pas toutes les solutions. À l'inverse, une famille obtenue par un raisonnement nécessaire doit être substituée dans l'équation pour vérifier qu'elle convient.

Jusqu'où aller. Équations linéaires, factorisations et obstacles de congruence. Les équations de Pell, la réciproque quadratique et les méthodes avancées de théorie des nombres ne sont pas prioritaires pour cette préparation.

5 · Calcul algébrique, sommes et polynômes

Priorité CGL : Indispensable. **Origine habituelle :** lycée ; notation des sommes approfondie en MPSI.

Lire le symbole $\sum$

Pour $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq n$, et des termes $a_m, \dots, a_n$ définis, on écrit

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

Le symbole $\sum$ demande d'additionner ; k est l'indice, m sa première valeur et n sa dernière. Il y a $n - m + 1$ termes. Pour $\sum_{k=2}^4 k^2$, on remplace successivement k par 2, 3, puis 4 : la somme vaut $4 + 9 + 16 = 29$.

Un indice muet et un paramètre

L'indice k est dit **muet** : il sert seulement à parcourir les termes à l'intérieur de la somme. Après l'addition, il n'est plus une variable libre de l'expression. On peut le renommer, en modifiant toutes ses occurrences :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{j=1}^n j^2.$$

Le nombre n joue un autre rôle : il fixe la dernière valeur de l'indice et peut rester un paramètre du résultat.

Ainsi, $\sum_{k=1}^n n = n^2$ pour $n \geq 1$: le terme n est répété n fois. Dans $\sum_{k=1}^n k$, les termes changent : on additionne $1, 2, \dots, n$. Ne remplace pas un paramètre par l'indice en renommant celui-ci.

Sommes vides et produits

Une somme sans terme vaut 0, en particulier $\sum_{k=1}^0 a_k = 0$. Le symbole $\prod$ demande de multiplier les termes ; un produit vide vaut 1. Ces conventions sont compatibles avec l'ajout d'une somme vide et la multiplication par un produit vide.

Linéarité

Pour une même plage d'indices et une constante c indépendante de k ,

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k, \quad \sum_{k=m}^n c a_k = c \sum_{k=m}^n a_k.$$

On distribue ainsi une addition terme à terme et on sort un facteur constant. En revanche, $\sum a_k b_k$ n'est généralement pas le produit des deux sommes : ce produit contient aussi les termes d'indices différents.

Changer d'indice et simplifier une somme

Changer d'indice avec les bornes

Avec $j = k + 2$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n a_{k+2} = \sum_{j=2}^{n+2} a_j.$$

Écris le premier et le dernier terme pour contrôler le changement. Une erreur d'une unité aux bornes peut détruire une simplification juste au milieu du calcul.

Essai guidé · Décomposer le terme d'une somme

Pour $S_n = \sum_{k=0}^n 1/((k+2)(k+4))$, cherche A, B tels que le terme général soit $A/(k+2) + B/(k+4)$. Quels termes restent après les simplifications ?

On a $1/((k+2)(k+4)) = \frac{1}{2}(1/(k+2) - 1/(k+4))$. Pour $n \geq 1$, les deux sommes portent sur les indices $2, \dots, n+2$ et $4, \dots, n+4$. Les termes d'indices communs s'annulent deux à deux ; restent les termes d'indices $2, 3$ et $n+3, n+4$:

$$S_n = \frac{5}{12} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right).$$

La formule vaut aussi pour $n = 0$, où elle donne $1/8$. On en déduit $S_n \rightarrow 5/12$.

Télescopage

Pour une suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et des entiers $0 \leq m \leq n$,

$$\sum_{k=m}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_m.$$

Reconnaître une différence est souvent plus utile que développer chaque terme séparément.

Chercher · Factoriser pour simplifier

Pour $n \geq 1$, étudie $P_n = \prod_{k=1}^n (1 - 1/(k+2)^2)$. Cherche une formule, puis une limite, avant la page suivante.

Produits et formule du binôme

Dans le produit P_n proposé à la page précédente, chaque facteur vaut $(k+1)(k+3)/(k+2)^2$. Ainsi

$$P_n = \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k+2} \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+3}{k+2} \right) = \frac{2}{n+2} \frac{n+3}{3}.$$

La formule donne $P_n \rightarrow 2/3$. Un produit de facteurs strictement inférieurs à 1 ne tend donc pas nécessairement vers 0.

Binôme de Newton

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On prend $0! = 1$. Pour $n = 0$, la formule exprime l'identité constante 1 ; on interprète les facteurs d'exposant nul comme 1 dans ce développement polynomial.

Pourquoi les coefficients apparaissent. Dans les n facteurs $(a+b)$, choisis les k positions où tu prends b . Les autres fournissent a . Il existe $\binom{n}{k}$ tels choix ; le regroupement donne la formule.

En prenant $(a, b) = (1, 1)$, on obtient $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$. Avec $(1, -1)$ et $n \geq 1$, $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$: autant de sous-ensembles de taille paire que de taille impaire.

Choisir entre forme développée et factorisée

Choisis la forme de l'expression selon la question. Pour trouver des racines ou étudier un signe, essaie de factoriser. Pour comparer des coefficients, développe. Dans une somme ou un produit, cherche si des termes se compensent avant de tout calculer.

Attention

On ne simplifie que des facteurs, pas des morceaux de sommes. Par exemple $(x+2)/(x+3)$ ne se simplifie pas par x , et sa définition exige $x \neq -3$.

Pour t'entraîner. CGL 2026, exercice 1, partie I : produits et identités ; prends les petites valeurs pour repérer le facteur manquant.

Polynômes : racines et identités

Priorité CGL : Très rentable. **Origine habituelle :** lycée ; formulation générale en MPSI.

Définition et degré

Sur $\mathbb{R}$, un polynôme est une somme finie $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$. Si $P \neq 0$ et $a_d \neq 0$, son degré est le plus grand indice de coefficient non nul. Le degré du polynôme nul n'est pas utilisé ici. Un nombre r est racine de P si $P(r) = 0$.

Une racine donne un facteur

Pour $k \geq 1$, $X^k - r^k = (X - r) \sum_{j=0}^{k-1} X^{k-1-j} r^j$. En l'appliquant à chaque terme, $P(X) - P(r)$ est divisible par $X - r$. Par conséquent,

$$P(r) = 0 \iff P(X) = (X - r)Q(X)$$

pour un certain polynôme Q . La réciproque se vérifie en substituant $X = r$.

Nombre de racines

Un polynôme non nul de degré d a au plus d racines distinctes. Deux polynômes de degré au plus d qui coïncident en $d + 1$ points distincts sont égaux.

Pour $d = 0$, un polynôme constant non nul n'a aucune racine. Pour $d \geq 1$, s'il n'a pas de racine, la borne est acquise. Sinon, choisis une racine r et factorise $P = (X - r)Q$, avec Q non nul de degré $d - 1$. Toute racine $s \neq r$ vérifie $0 = (s - r)Q(s)$, donc $Q(s) = 0$. L'hypothèse de récurrence donne au plus $d - 1$ telles racines, soit au plus d en comptant r . Pour la seconde propriété, la différence des polynômes a $d + 1$ racines distinctes : elle ne peut pas être non nulle.

Exemple · Factoriser et vérifier

$$3X^3 + 2X^2 - 12X - 8 = (3X + 2)(X^2 - 4) = (3X + 2)(X - 2)(X + 2).$$

Les trois racines sont $-2/3$, 2 et -2 ; le degré 3 exclut une autre racine distincte.

Attention

Vérifier une identité en trois points ne suffit pas si les degrés ne sont pas contrôlés. Une fonction qui s'annule en beaucoup de points n'est pas nécessairement nulle ; la propriété précédente concerne les polynômes.

Pour t'entraîner. CGL 2023, exercice 2 ; utilise degré, signe et variations sans chercher d'emblée une formule pour les racines.

Faire baisser le degré

Essai guidé · Des décalages qui se compensent

Calcule $x^2 - (x+2)^2 - (x+3)^2 + (x+5)^2$. Pourquoi le résultat ne dépend-il pas de x ? Peut-on expliquer cela sans développer quatre carrés ?

Le calcul donne 12. Introduisons une transformation qui révèle la raison de cette simplification.

Différence finie

Pour $h \in \mathbb{R}$, on pose $\Delta_h P(X) = P(X+h) - P(X)$. Si P est non constant, de degré d et de coefficient dominant a_d , et si $h \neq 0$, alors $\Delta_h P$ a degré $d-1$ et coefficient dominant dha_d .

En effet, le binôme donne $(X+h)^d - X^d = dhX^{d-1}$ plus des termes de degrés inférieurs. Les constantes disparaissent. Chaque autre terme non constant a un degré au plus $d-1$ et donne une différence de degré au plus $d-2$. Le coefficient annoncé ne s'annule pas. Pour $d=1$, seul le terme dominant fournit une différence non nulle : elle est constante.

Pour $P(X) = X^2$, $\Delta_2 P(X) = 4X + 4$, puis $\Delta_3 \Delta_2 P(X) = 12$. Or

$$\Delta_3 \Delta_2 P(X) = P(X+5) - P(X+3) - P(X+2) + P(X).$$

Deux différences ont fait descendre le degré de 2 à 0. Une différence supplémentaire annulerait ce polynôme constant.

Comparer des coefficients

Si une identité polynomiale vaut pour tout réel x , les coefficients de chaque puissance sont égaux. On peut ainsi déterminer des constantes inconnues. Mais si une égalité ne vaut qu'en un point fixé, comparer les coefficients n'est pas justifié.

Exemple · Complément facultatif : racines rationnelles

Si un polynôme à coefficients entiers, de coefficient dominant $a_d \neq 0$ et de terme constant $a_0 \neq 0$, de degré $d \geq 1$ a une racine p/q irréductible avec $q > 0$, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_d$. Le nombre p est non nul, puisque 0 n'est pas racine. Multiplie l'équation par q^d . Tous les termes sauf $a_0 q^d$ sont divisibles par p ; tous sauf $a_d p^d$ sont divisibles par q .

On obtient donc $p \mid a_0 q^d$ et $q \mid a_d p^d$. Comme $\text{PGCD}(p, q) = 1$, Gauss permet d'ôter un facteur q dans la première divisibilité, puis de recommencer d fois : $p \mid a_0$. En échangeant les rôles de p et q , on obtient $q \mid a_d$.

Jusqu'où aller. Racines, factorisation, comparaison des coefficients et différences finies. Les structures abstraites d'anneaux et une théorie générale de l'interpolation peuvent attendre.

Pour t'entraîner. CGL 2026, exercice 2, notamment les questions 7 et 8 : remarque que le sujet fournit progressivement les outils.

Chercher · Une fonction à déterminer

Cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues en 0, telles que $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Essaie quelques entrées autorisées avant de poursuivre à la page suivante.

Aborder une équation fonctionnelle

Priorité CGL : Approfondissement utile. **Origine habituelle :** lycée ; préparation olympique.

Les substitutions simples constituent une méthode de recherche très transférable : elles donnent des valeurs particulières ou relient deux expressions de la fonction.

Une équation fonctionnelle impose une relation à une fonction inconnue pour plusieurs entrées. Commence par préciser le domaine. Tu peux ensuite essayer 0, 1, deux entrées égales ou opposées, à condition que ces choix soient autorisés par l'énoncé.

Un indice pour la question précédente. Quelle fonction simple produit le terme $2xy$ quand on l'évalue en $x + y$? Reprends la recherche avant la preuve ci-dessous.

L'identité $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ suggère $g(x) = f(x) - x^2$. Alors g est continue en 0 et vérifie $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

Avec $x = y = 0$, l'additivité donne $g(0) = 2g(0)$, donc $g(0) = 0$. Puis $g(x) + g(-x) = g(0)$ donne $g(-x) = -g(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, une récurrence établit $g(nx) = ng(x)$: le cas $n = 0$ est acquis et $g((n + 1)x) = g(nx) + g(x)$. L'identité pour les entiers négatifs suit de l'impairité. En posant $c = g(1)$, pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$qg(p/q) = g(p) = pc, \quad g(p/q) = (p/q)c.$$

Il reste à passer des rationnels aux réels. L'additivité et la continuité en 0 donnent la continuité en tout x , car $g(x + h) - g(x) = g(h) \rightarrow 0$. Pour chaque réel x , prenons $r_n = \lfloor nx \rfloor / n$ pour $n \geq 1$. On a $r_n \in \mathbb{Q}$ et $0 \leq x - r_n < 1/n$, donc $r_n \rightarrow x$. Par continuité, $g(x) = \lim cr_n = cx$.

Ainsi toutes les solutions sont $f(x) = x^2 + cx$, $c \in \mathbb{R}$. La substitution prouve que chacune convient et est continue en 0.

Attention

Une formule établie sur $\mathbb{Q}$ ne s'étend pas automatiquement à $\mathbb{R}$. Ici, la continuité fournit le passage manquant. N'ajoute jamais une hypothèse de continuité, de monotonie ou de dérivabilité absente de l'énoncé.

Pour t'entraîner. CGL 2025, exercice 3 ; relève d'abord le domaine imposé par les racines carrées.

Chercher · Créer les catégories

Parmi sept entiers, prouve que deux ont une différence divisible par 6. Cherche avant de passer à la page suivante.

6 · Dénombrement et combinatoire

Priorité CGL : Très rentable. **Origine habituelle :** Terminale spécialité ; préparation olympique.

Avant de compter, dis ce qui constitue un objet et quand deux descriptions représentent le même objet. Les erreurs viennent souvent d'un ordre compté deux fois ou, au contraire, oublié.

Addition et multiplication

Si des cas sont deux à deux disjoints, le nombre total d'objets est la somme des nombres par cas. Si une construction se fait par étapes et que chaque choix d'une étape admet le même nombre de prolongements à la suivante, les nombres de choix se multiplient.

Une permutation de n objets distincts a $n!$ possibilités. Une liste ordonnée de k objets distincts parmi n , avec $0 \leq k \leq n$, a $n!/(n-k)!$ possibilités. Une sélection sans ordre de k objets en a $\binom{n}{k}$, car chaque sélection est décrite par $k!$ listes ordonnées.

Exemple · Un code à quatre chiffres

Un code de quatre chiffres distincts ne commence pas par 0. Il y a 9 choix pour le premier chiffre, puis 9, 8, 7 pour les suivants : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ codes. Le deuxième chiffre peut être 0 ; il a donc autant de choix que le premier, pour une raison différente.

Principe des tiroirs

Si N objets sont répartis dans $k \geq 1$ catégories, une catégorie contient au moins $\lceil N/k \rceil$ objets. La notation $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x . En particulier, $k+1$ objets dans k catégories forcent une répétition.

Si aucune catégorie ne contient au moins $\lceil N/k \rceil$ objets, chacune en contient au plus $\lceil N/k \rceil - 1 < N/k$. Leur total serait donc inférieur à N , contradiction. La difficulté est souvent de choisir les catégories qui rendent la répétition utile.

Pour les sept entiers proposés, classe-les selon leur reste modulo 6. Deux ont le même reste ; leur différence est divisible par 6.

Pour t'entraîner. CGL 2022, exercice 2, question 6 et CGL 2024, exercice 3, question 4. Identifie précisément les objets et les tiroirs.

Double comptage et petits graphes

Essai guidé · Choisir un groupe et son responsable

Dans un ensemble de $n \geq 1$ élèves, on choisit un groupe de k élèves puis un responsable dans ce groupe, avec $1 \leq k \leq n$. Compte ces choix en commençant une fois par le groupe, une fois par le responsable.

Le premier ordre donne $k \binom{n}{k}$. Le second donne $n \binom{n-1}{k-1}$: après le responsable, on choisit les $k-1$ autres élèves. D'où

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Chaque côté compte les couples formés d'un groupe et de son responsable. Changer l'ordre des choix fournit donc deux expressions du même nombre.

Méthode du double comptage

Définis un ensemble fini d'incidences, souvent des couples (objet, marque). Compte-le en regroupant selon la première composante, puis selon la seconde. Les deux sommes sont égales parce qu'elles comptent les mêmes couples, chacun exactement une fois.

Complément facultatif : représenter des relations par un graphe

Un graphe simple fini possède des sommets et des arêtes reliant deux sommets distincts ; il n'y a ni boucle ni arête répétée. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

Comptons les couples (v, e) où v est une extrémité de l'arête e . Par sommet, le total est la somme des degrés ; par arête, il vaut deux fois le nombre d'arêtes. Ainsi

$$\sum_v \deg(v) = 2 \# \{\text{arêtes}\}.$$

Le nombre de sommets de degré impair est donc pair : la parité de la somme est celle du nombre de termes impairs.

Exemple · Changer de représentation

Dans un groupe où la relation « se connaît » est réciproque, prends une personne par sommet et une relation par arête. La formule précédente prouve que le nombre de personnes connaissant un nombre impair d'autres personnes est pair. Nul besoin de dessiner toutes les configurations.

Attention

Les mêmes mots peuvent désigner des objets différents. Une poignée de main est une arête ; une personne participant à une poignée de main est une incidence. Compter ces deux ensembles sans les distinguer produit un facteur 2 manquant.

Jusqu'où aller. Utiliser des graphes comme représentations. Le calcul matriciel des graphes, rencontré en Maths expertes, n'est pas un préalable à ces méthodes.

Invariants et monovariants

Invariant et monovariant

Pour analyser une suite d'opérations, on cherche ce qu'elles conservent ou ce qu'elles font augmenter ou diminuer. Un invariant est une quantité conservée à chaque opération autorisée. Un monovariant évolue toujours dans le même sens. Pour prouver qu'un processus termine, une quantité entière strictement décroissante et minorée convient ; une quantité réelle décroissante et minorée ne suffit pas.

Si la configuration que tu veux obtenir n'a pas la même valeur d'un invariant que la configuration initiale, les opérations autorisées ne permettent pas de l'atteindre. La réciproque n'est pas automatique : conserver l'invariant peut être nécessaire sans être suffisant.

Essai guidé · Répartir sans perdre

Un nombre fini de boîtes contient des nombres entiers non négatifs de jetons. Si deux boîtes contiennent $x \geq y + 2$, on transfère un jeton de la première à la seconde. Ce procédé finit-il ? La somme des contenus permet-elle de le prouver ?

La somme reste constante : c'est un invariant, mais il ne mesure pas le progrès. Introduisons l'énergie E , somme des carrés des contenus. L'opération remplace $x^2 + y^2$ par $(x - 1)^2 + (y + 1)^2$; la diminution vaut

$$x^2 + y^2 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2 = 2(x - y - 1) \geq 2.$$

L'énergie est un entier non négatif et décroît strictement. Il ne peut donc y avoir une infinité d'opérations. À l'arrêt, deux contenus quelconques diffèrent d'au plus 1, sinon une opération resterait possible.

Avec trois boîtes contenant 1, 4, 8 jetons, le total 13 reste fixe. À l'arrêt, les contenus sont 4, 4, 5, à l'ordre près : trois entiers différant d'au plus 1 et de somme 13 ne permettent pas d'autre répartition.

Pourquoi cet objet auxiliaire ?

La somme ne change pas lors d'un transfert. Les carrés, eux, pénalisent les écarts : retirer un jeton à une grande boîte fait davantage baisser le carré qu'en ajouter un à une petite ne le fait monter. Cette observation suggère le monovariant avant son calcul.

Attention

La suite réelle $1/(n + 1)$ est strictement décroissante et minorée sans devenir constante. Pour conclure à la terminaison, utilise une décroissance entière ou une diminution minimale strictement positive.

Minimum, maximum, parité et coloriage

Choisir un minimum ou un maximum

Un ensemble fini non vide de réels a un minimum et un maximum. Le principe extrémal consiste à utiliser cette existence pour choisir un élément dont la taille est minimale ou maximale. Les autres éléments doivent respecter cette borne ; on peut alors exploiter les conditions du problème pour la contredire.

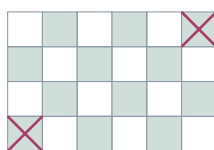
Essai guidé · Un ensemble stable par moyenne

Un ensemble fini non vide $S \subset \mathbb{R}$ contient la moyenne $(x + y)/2$ de chacun de ses couples d'éléments. Peut-il contenir deux éléments distincts ?

S'il en contient au moins deux, notons M son maximum et m le plus grand élément strictement inférieur à M . La moyenne $(m + M)/2$ appartient à S et vérifie $m < (m + M)/2 < M$, contrairement au choix de m . Ainsi S contient un seul élément. Inversement, un singleton possède bien cette stabilité.

Complément facultatif : un coloriage rend visible un invariant

Colorons les cases d'un rectangle 4×6 en damier. Un domino couvrant deux cases voisines par un côté recouvre une case de chaque couleur. Retirons les cases $(1, 1)$ et $(4, 6)$: elles ont la même couleur, car les sommes de leurs coordonnées sont paires.



Le rectangle initial contient 12 cases de chaque couleur. Après retrait, il en reste 10 de l'une et 12 de l'autre : aucun pavage par dominos n'est possible. Le nombre total 22 était pourtant pair ; ce premier test ne suffisait pas.

Reconnaître une piste

Des déplacements sur une grille invitent à tester la parité des coordonnées, puis un coloriage. Des conditions sur tous les éléments d'un ensemble fini invitent à choisir le plus petit, le plus grand ou une paire d'écart minimal. L'objet choisi doit exister : précise la finitude ou une propriété qui garantit le minimum.

Jusqu'où aller. Invariants simples, coloriages utiles et principe extrémal. Aborde les théorèmes plus avancés lorsqu'un problème te donne une raison de les étudier.

7 · Probabilités

Priorité CGL : Indispensable. **Origine habituelle :** Première / Terminale spécialité.

Univers fini

Un univers fini Ω est un ensemble non vide d'issues. Une probabilité attribue à chaque issue ω un poids $p_\omega \geq 0$, avec $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. Un événement est une partie $A \subset \Omega$ et $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$.

Si toutes les issues ont le même poids, $P(A) = |A|/|\Omega|$. Il faut donc justifier que les issues ont la même probabilité avant de compter. Des événements comme « un succès » ou « deux succès » peuvent regrouper des nombres différents d'issues.

On a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

La dernière formule soustrait les issues comptées deux fois. Pour des événements disjoints, le terme d'intersection est nul.

Essais indépendants et dénombrement

Pour $n \in \mathbb{N}$ essais indépendants donnant chacun un succès de probabilité $p \in [0, 1]$, une suite fixée de k succès et $n - k$ échecs a probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$. Il existe $\binom{n}{k}$ placements des succès. Le nombre X de succès vérifie donc

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Pour $p = 0$ ou 1 , on lit directement la loi dégénérée : $X = 0$ ou $X = n$ avec probabilité 1.

Essai guidé · Au moins un, ou exactement un ?

Sur quatre essais indépendants avec $p = 1/3$, compare la probabilité d'avoir au moins un succès et celle d'en avoir exactement un.

Le complément donne $P(X \geq 1) = 1 - (2/3)^4 = 65/81$. Le dénombrement donne $P(X = 1) = 4(1/3)(2/3)^3 = 32/81$. Les deux événements ne répondent pas à la même question.

Attention

L'événement « deux succès » regroupe plusieurs suites d'essais. Les événements « deux succès » et « aucun succès » ne sont pas nécessairement équiprobables. Précise les issues de ton univers et leur probabilité avant de compter.

Conditionnement et indépendance

Probabilité conditionnelle

Si $P(B) > 0$, la probabilité de A sachant B est $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B)$. D'où $P(A \cap B) = P(B)P(A | B)$.

Deux événements A, B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(B) > 0$, cela équivaut à $P(A | B) = P(A)$.

L'indépendance n'est pas la disjonction : deux événements disjoints de probabilités strictement positives ne sont pas indépendants.

Partitionner avant de calculer

Si $B_1, \dots, B_r$ sont deux à deux disjoints, couvrent Ω et ont des probabilités positives, alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^r P(B_i)P(A | B_i).$$

Cette formule des probabilités totales suit de la décomposition disjointe de A en $A \cap B_i$. Une branche de probabilité nulle contribue 0 sans définir de conditionnement sur elle.

Exemple · Après une observation, les poids changent

On choisit avec probabilité $1/2$ l'urne U , contenant trois boules rouges et une bleue, ou l'urne V , contenant une rouge et deux bleues. Puis on tire une boule uniformément dans l'urne choisie. Pour l'événement R « rouge »,

$$P(R) = \frac{1}{2} \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{13}{24}, \quad P(U | R) = \frac{(1/2)(3/4)}{13/24} = \frac{9}{13}.$$

Observer rouge rend l'urne U plus probable que lors du choix initial. $P(U | R)$ et $P(R | U)$ n'ont pas le même sens.

Exemple · Sans remise, une dépendance

Dans l'urne U , tirons deux boules sans remise. Les deux événements « première rouge » et « seconde rouge » ont chacun probabilité $3/4$: chaque boule a la même probabilité d'occuper chacune des deux positions. Leur intersection vaut $(3/4)(2/3) = 1/2 \neq 9/16$. Les tirages ne sont pas indépendants.

Ce que montre le jury · 2024

Le rapport indique que la première partie du problème de boîtes a été bien investie, les parties suivantes beaucoup moins. [Rapport 2024, §2](#).

Pour ta préparation. La première partie ne suffisait pas à traiter les variantes des suivantes. Après une réussite sur un jeu connu, vérifie donc à nouveau les choix autorisés et les informations disponibles quand les règles changent. Reconstitue l'expérience et les conditionnements avant de reprendre un calcul.

Chercher · Teste ce que tu sais retrouver · 4

On choisit uniformément une paire de deux entiers distincts de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On t'indique que leur somme est impaire. Quelle est la probabilité que les deux entiers soient inférieurs ou égaux à 3 ? [Réponse](#), p. 61.

Une probabilité peut suivre une récurrence

Essai guidé · La parité des succès

Une pièce donne un succès de probabilité p à chaque essai, indépendamment des autres. Note q_n la probabilité d'un nombre pair de succès après n essais. Trouve q_0 , puis exprime q_{n+1} en fonction de q_n .

Le nombre de succès reste pair si l'on avait un nombre pair puis un échec, ou un nombre impair puis un succès. Ces cas sont disjoints et le nouvel essai est indépendant du passé :

$$q_0 = 1, \quad q_{n+1} = (1-p)q_n + p(1-q_n) = p + (1-2p)q_n.$$

La valeur $1/2$ vérifie cette relation pour tout p . Posons $r_n = q_n - 1/2$ pour faire disparaître le terme constant. La suite auxiliaire vérifie $r_{n+1} = (1-2p)r_n$, donc

$$q_n = \frac{1 + (1-2p)^n}{2} \quad (n \geq 1), \quad q_0 = 1.$$

Si $0 < p < 1$, $|1-2p| < 1$, donc $q_n \rightarrow 1/2$. Pour $p = 0$, $q_n = 1$; pour $p = 1$, la parité alterne. Les extrémités du domaine nécessitent leur propre lecture.

Compter avec des indicatrices

Pour une variable réelle X sur un univers fini, $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega} p_{\omega} X(\omega)$. L'espérance est linéaire, sans hypothèse d'indépendance. L'indicatrice $\mathbf{1}_A$ vaut 1 sur A et 0 ailleurs ; son espérance vaut $P(A)$.

Répartissons indépendamment $n \geq 1$ objets dans $m \geq 1$ boîtes, chaque boîte ayant probabilité $1/m$ pour chaque objet. Si I_j vaut 1 lorsque la boîte j est occupée et 0 sinon, le nombre de boîtes occupées vaut $X = \sum_{j=1}^m I_j$. Une boîte reste vide avec probabilité $(1 - 1/m)^n$, d'où

$$\mathbb{E}(X) = m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n \right].$$

Les occupations des boîtes ne sont pas indépendantes en général ; la linéarité n'en a pas besoin.

Attention

Dans un jeu, maximiser une espérance et garantir un gain contre tout choix adverse sont deux objectifs différents. Écris l'objectif avant de chercher une stratégie.

Pour t'entraîner. CGL 2022, exercice 3 pour les répétitions de jeux et CGL 2021, exercice 2 pour un état qui évolue au fil des tirages.

8 · Analyse : la sélection utile

Priorité CGL : Indispensable. **Origine habituelle :** Terminale spécialité ; approfondissements MPSI.

L'analyse sert souvent à obtenir un signe, une racine, une borne ou une limite dont un autre volet du problème a besoin. Commence par la question à résoudre ; ne lance pas une étude de fonction complète si une seule variation suffit.

Dérivée et variations

Une fonction f à valeurs réelles, définie au voisinage d'un réel a , est dérivable en a si le quotient $[f(a+h) - f(a)]/h$ a une limite réelle quand $h \rightarrow 0$, $h \neq 0$. Cette limite est $f'(a)$. Pour $a < b$, si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f' \geq 0$ sur $]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$. Si $f' > 0$ partout à l'intérieur, elle est strictement croissante. Les signes inverses donnent les versions décroissantes.

Ces critères usuels du lycée sont admis ici. Pour les appliquer, vérifie la continuité, la dérivabilité et le signe sur l'intervalle où tu veux comparer les valeurs.

Exemple · Trouver une borne par les variations

Pour $f(x) = x + 4/x$ sur $]0, +\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}.$$

Elle décroît sur $]0, 2]$ puis croît sur $[2, +\infty[$. Son minimum vaut $f(2) = 4$, donc $x + 4/x \geq 4$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement pour $x = 2$.

Une preuve algébrique donne la même information : $x + 4/x - 4 = (x-2)^2/x \geq 0$. Ici, la factorisation donne directement la borne et le cas d'égalité. La dérivée serait utile si l'on demandait aussi les variations de la fonction.

Attention

Le domaine peut avoir plusieurs intervalles séparés par une valeur interdite. Le signe positif d'une dérivée sur ce domaine ne garantit pas une comparaison entre deux points séparés par la coupure. Pour $-1/x$, la dérivée est positive sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mais $-1/(-1) > -1/1$.

Jusqu'où aller. Dérivées usuelles, domaines, variations et arguments de signe. Les développements limités ne sont pas nécessaires pour débiter une préparation solide.

Chercher · Trouver une valeur de comparaison

Pour $x \geq 0$, cherche à comparer $\ln(1+x)$ et $2x/(2+x)$. Quelle comparaison paraît vraie ? Écris une tentative de preuve avant la page suivante.

Démontrer une inégalité avec une fonction

Une inégalité entre deux expressions d'une variable peut se ramener au signe d'une fonction. Les variations permettent alors de comparer toutes ses valeurs à un minimum, ou à une valeur déjà connue.

De l'inégalité au signe

Pour prouver $A(x) \geq B(x)$ sur un intervalle I , pose $F(x) = A(x) - B(x)$ et montre que $F(x) \geq 0$ sur I . Vérifie d'abord que les deux expressions sont définies.

Si F admet un minimum en $c \in I$ et si $F(c) \geq 0$, le résultat suit. Si F est croissante et $x \geq c$, alors $F(x) \geq F(c)$. Pour $x \leq c$, la comparaison est inversée.

Reprenons la comparaison proposée : les deux expressions sont définies sur $] -1, +\infty[$. Posons

$$F(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}.$$

On a $F(0) = 0$ et

$$F'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \geq 0 \quad (x > -1).$$

Les facteurs du dénominateur sont strictement positifs sur ce domaine. La fonction est donc croissante. Pour $x \geq 0$, $F(x) \geq F(0) = 0$, ce qui donne

$$\ln(1+x) \geq \frac{2x}{2+x}.$$

Pour $x > 0$, la dérivée est strictement positive sur $]0, x[$; la fonction est strictement croissante sur $[0, x]$, donc $F(x) > F(0)$. L'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

Le même calcul, de l'autre côté de 0

Pour $-1 < x \leq 0$, la croissance donne cette fois $F(x) \leq F(0) = 0$: on obtient $\ln(1+x) \leq 2x/(2+x)$. Connaître le signe de la dérivée ne suffit pas ; il faut aussi savoir de quel côté de la valeur de comparaison se trouve x .

Attention

Une fonction croissante n'est pas forcément positive : $x \mapsto x - 5$ est croissante et négative pour $x < 5$. Pour conclure sur un signe, ajoute une valeur connue ou une borne inférieure.

Pour réutiliser la méthode. Cherche une différence dont la dérivée se simplifie et une valeur où les deux membres coïncident. Si la fonction décroît puis croît, calcule plutôt son minimum. Termine en revenant à l'inégalité demandée, avec son domaine et son cas d'égalité.

Continuité, existence et limites

Soit $D \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in D$ si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a en restant dans D . La fonction est continue sur D si elle l'est en chacun de ses points. Aux extrémités d'un segment, on approche depuis le segment.

Complément facultatif : formuler cette proximité avec des quantificateurs. La condition précédente s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Les valeurs de f restent aussi proches que demandé de $f(a)$ lorsque x est assez proche de a dans D . L'ordre signifie que la distance δ peut dépendre de la précision ε , mais doit convenir à tous les x concernés.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteint par f en au moins un point de $[a, b]$. Si f est en plus strictement monotone, ce point est unique.

La continuité garantit l'existence, la stricte monotonie l'unicité. L'image n'a pas besoin d'être calculée entièrement : deux valeurs de signes opposés peuvent suffire pour une racine.

Exemple · Une racine sans formule explicite

Pour $F(x) = x^3 + 2x - 5$, $F(1) = -2$ et $F(2) = 7$. La continuité donne une racine dans $]1, 2[$. Comme $F'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, elle est unique sur $\mathbb{R}$.

Essai guidé · Une suite de racines

Pour $n \geq 1$, soit $P_n(x) = x^3 + x/n - 3$. Établir l'existence d'une unique racine x_n dans $]1, 2[$. Compare $P_{n+1}(x_n)$ à 0 pour deviner le sens de variation de (x_n) .

On a $P_n(1) < 0$, $P_n(2) > 0$ et $P'_n(x) = 3x^2 + 1/n > 0$; le TVI et la stricte croissance donnent l'existence et l'unicité. De plus,

$$P_{n+1}(x_n) = P_n(x_n) - \frac{x_n}{n(n+1)} < 0.$$

Puisque P_{n+1} est croissante et s'annule en x_{n+1} , on a $x_n < x_{n+1}$. La suite est croissante et majorée par 2 ; elle converge vers $\ell \in [1, 2]$. L'égalité $x_n^3 + x_n/n = 3$, avec $0 < x_n/n < 2/n \rightarrow 0$, donne $\ell^3 = 3$, donc $\ell = \sqrt[3]{3}$.

Passer à la limite avec les bonnes hypothèses

Les sommes et produits de suites convergentes suivent les règles usuelles ; un quotient exige une limite du dénominateur non nulle. Une composition exige la continuité au point limite. Le passage à la limite conserve une inégalité large, mais pas nécessairement une inégalité stricte : $1/n > 0$ et pourtant sa limite vaut 0.

Pour t'entraîner. CGL 2023, exercice 2 : les racines de polynômes dont les coefficients varient appellent souvent encadrement et monotonie.

Convexité : cordes et tangentes

Priorité CGL : Très rentable. **Origine habituelle :** Terminale spécialité ; formulation générale en MPSI.

Définition sur un intervalle

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle, est convexe si, pour tous $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Elle est concave si l'inégalité est inversée. Géométriquement, le graphe d'une fonction convexe est sous ses cordes.

Le cas $t = 1/2$ compare la valeur au milieu à la moyenne des deux valeurs. La définition complète porte sur toutes les pondérations, pas seulement sur les milieux.

Critères et tangente

Pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , la convexité équivaut à la croissance de f' . Si elle est deux fois dérivable, $f'' \geq 0$ sur I suffit. Pour une fonction convexe dérivable et tous $a, x \in I$,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Le graphe est donc au-dessus de chaque tangente.

Pour comprendre la dernière inégalité, applique la définition entre a et x avec $0 < t \leq 1$:

$$f(x) - f(a) \geq \frac{f(a + t(x - a)) - f(a)}{t}.$$

En laissant $t \rightarrow 0^+$, le membre de droite tend vers $f'(a)(x - a)$. Cette preuve vaut que x soit à droite ou à gauche de a .

Exemple · L'exponentielle et le logarithme

La dérivée seconde de e^x est positive. Sa tangente en 0 donne $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x . Le logarithme est concave sur $]0, +\infty[$, car $(\ln)''(x) = -1/x^2$; sa tangente en 1 donne $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$.

Attention

Pour une fonction convexe : sous les cordes, au-dessus des tangentes. Ces deux comparaisons concernent des droites différentes ; les confondre inverse les inégalités.

Convexité : comparer des moyennes

Priorité CGL : Approfondissement utile. **Origine habituelle :** lycée ; regroupement utilisé en préparation olympique.

Essai guidé · Passer de deux valeurs à trois

La définition de convexité compare deux valeurs de f . Pour $a, b, c \in I$, elle permet-elle aussi de comparer $f((a+b+c)/3)$ à $(f(a) + f(b) + f(c))/3$? Essaie de regrouper deux des trois nombres en une moyenne.

On peut écrire $(a+b+c)/3 = \frac{2}{3}((a+b)/2) + \frac{1}{3}c$. Appliquer la convexité à cette écriture, puis à $(a+b)/2$, donne la comparaison cherchée. Le regroupement permet de traiter davantage de valeurs.

Comparer la valeur en une moyenne à la moyenne des valeurs

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur un intervalle I , $r \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_r \in I$. Alors

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_r}{r}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_r)}{r}.$$

La moyenne des x_i appartient à I : elle est comprise entre leur minimum et leur maximum. Pour une fonction concave, l'inégalité est inversée.

Preuve par récurrence sur le nombre de valeurs

Pour $r = 1$, les deux membres sont égaux. Supposons le résultat vrai pour $r-1$ valeurs, avec $r \geq 2$, et posons $m = (x_1 + \dots + x_{r-1})/(r-1)$. Cette moyenne appartient à I .

On regroupe les r nombres en cette moyenne et la dernière valeur :

$$\frac{x_1 + \dots + x_r}{r} = \frac{r-1}{r}m + \frac{1}{r}x_r.$$

La définition de convexité, puis l'hypothèse de récurrence, donnent

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_r}{r}\right) \leq \frac{r-1}{r}f(m) + \frac{1}{r}f(x_r) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_r)}{r}.$$

Le pas est démontré ; la récurrence conclut. La méthode consiste à réduire une comparaison de plusieurs valeurs à une comparaison de deux valeurs déjà disponible.

Quand essayer cette inégalité ?

Une somme fixée donne une moyenne connue. Pour $f(x) = x^2$, on obtient

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_r}{r}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_r^2}{r}.$$

Si $m = (x_1 + \dots + x_r)/r$, le cas d'égalité se retrouve sans théorème supplémentaire :

$$\sum_{i=1}^r (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^r x_i^2 - rm^2.$$

Le membre de gauche est nul si et seulement si chaque $x_i = m$. À somme fixée, la somme des carrés est donc minimale lorsque tous les nombres sont égaux.

Inégalités : garder l'égalité en vue

Moyenne arithmétique et géométrique

Pour $a, b \geq 0$, $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$, avec égalité si et seulement si $a = b$. En effet, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ donne $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Statut : Approfondissement utile. Le cas de deux nombres suffit ici ; il figure parmi les approfondissements possibles de Terminale. Une hypothèse de somme fixe invite à majorer le produit ; une hypothèse de produit fixe invite à minorer la somme. Si $a + b = 10$ et $a, b \geq 0$, alors $ab \leq 25$, atteint pour $a = b = 5$.

Fabriquer une quantité positive

Pour comparer deux expressions, étudie leur différence. Avec $a + b = 10$, l'identité $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ donne $100 - 4ab \geq 0$. Le carré explique à la fois la borne et l'égalité : $ab = 25$ exactement quand $a = b$.

Essai guidé · Comparer deux inverses

Pour $x, y > 0$, cherche à prouver $(x+y)(1/x + 1/y) \geq 4$. Développe le membre de gauche, retranche 4, puis mets au même dénominateur. Quel carré apparaît ?

Le calcul donne

$$(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) - 4 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0.$$

Le dénominateur est strictement positif. L'égalité a lieu si et seulement si $x = y$. Sans ces hypothèses de signe, la dernière comparaison ne serait pas justifiée.

Pour retrouver l'idée. Le cas $x = y$ donne 4 et suggère le facteur $(x-y)^2$. Un cas d'égalité pressenti peut aider à choisir une factorisation ; seul le calcul prouve l'inégalité générale.

Inégalité de Bernoulli

Pour $x \geq -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n \geq 1+nx$. Au rang 1, on a l'égalité. L'hérédité multiplie par $1+x \geq 0$: le rang suivant est minoré par $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$. L'hypothèse $x \geq -1$ est donc utilisée à une étape précise. Pour $n \geq 2$, l'égalité exige $x = 0$: au rang 2, la différence est x^2 ; pour $x > -1$, une inégalité stricte se transmet en multipliant par $1+x > 0$. Pour $x = -1$, $0 > 1-n$. Au rang 1, tout $x \geq -1$ donne l'égalité.

Pour t'entraîner. CGL 2021, exercice 3 : le sujet construit ses propres contraintes et comparaisons. Cherche l'inégalité locale demandée, sans ajouter de régularité ni supposer un théorème d'inégalités nécessaire.

Encadrer : signes, domaine et objectif

Priorité CGL : Indispensable. **Origine habituelle :** lycée ; méthodes d'analyse approfondies en MPSI.

Une majoration est une comparaison $A \leq B$; une minoration est $B \leq A$. Pour encadrer, on établit les deux. Une borne utile répond à une question précise : prouver une limite, empêcher un dénominateur de s'annuler, ou placer un nombre entre deux entiers.

Les règles qui contrôlent le sens

Pour des réels $a \leq b$, ajouter un même réel conserve le sens. Multiplier par $c \geq 0$ le conserve ; par $c < 0$ l'inverse. Si $0 < a \leq b$, alors $1/b \leq 1/a$.

Pour majorer A/B , majore A et *minore* B . Si $0 \leq A \leq M$ et $B \geq m > 0$, alors $0 \leq A/B \leq M/m$. Le signe de A et la stricte positivité de m sont nécessaires à cette règle.

Les puissances demandent aussi un domaine : $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$, mais décroissante sur $] -\infty, 0]$. Pour $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq x$; pour $x \geq 1$, $x^2 \geq x$. Il n'y a pas de sens unique valable pour tous les réels.

Essai guidé · Deux façons d'encadrer un quotient

Pour $x \in [0, 2]$, encadre $h(x) = (3x + 2)/(x + 1)$ en encadrant séparément le numérateur et le dénominateur. Peut-on faire mieux en réécrivant le quotient ?

On a $2 \leq 3x + 2 \leq 8$ et $1 \leq x + 1 \leq 3$, d'où $2/3 \leq h(x) \leq 8$. Ces bornes sont correctes, mais les extrêmes du numérateur et du dénominateur ne sont pas indépendants : ils viennent du même x .

La réécriture $h(x) = 3 - 1/(x + 1)$ conserve cette dépendance. Puisque $1/3 \leq 1/(x + 1) \leq 1$, on obtient

$$2 \leq h(x) \leq \frac{8}{3}.$$

Les deux bornes sont atteintes, en 0 et en 2. On sait donc aussi qu'elles sont les meilleures sur cet intervalle.

Attention

De $a \leq b$, on ne déduit pas $|a| \leq |b|$: $-4 \leq 2$, mais $4 > 2$. Pour $M \geq 0$, la condition $|a| \leq M$ équivaut à $-M \leq a \leq M$. Une seule borne supérieure sur a ne contrôle pas sa valeur absolue.

Avant de conclure. Vérifie le domaine et les signes. Teste une frontière ou un cas d'égalité : cela peut réfuter une borne fausse, mais ne prouve pas une borne générale.

Chercher · Teste ce que tu sais retrouver · 3

Pour $x, y \in [1, 4]$, démontre $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x - y|/2$ et détermine quand il y a égalité. **Réponse**, p. 61.

Majorer une erreur qui doit tendre vers zéro

Une distance à majorer

Pour prouver $u_n \rightarrow \ell$, il suffit d'établir, à partir d'un certain rang,

$$0 \leq |u_n - \ell| \leq r_n, \quad r_n \rightarrow 0.$$

Les gendarmes donnent alors $|u_n - \ell| \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow \ell$. Le majorant doit tendre vers 0 : une borne constante ne suffit pas.

Essai guidé · Une différence à préserver

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = \sqrt{4n^2 + 8n + 5} - (2n + 2)$. Pourquoi l'inégalité triangulaire n'aide-t-elle pas à prouver $w_n \rightarrow 0$? Quelle identité utilise les termes proches ?

La majoration $|w_n| \leq \sqrt{4n^2 + 8n + 5} + 2n + 2$ est vraie, mais son membre de droite grandit. Elle efface la compensation entre les deux termes.

Comme $4n^2 + 8n + 5 = (2n + 2)^2 + 1$, la racine est supérieure à $2n + 2 > 0$. En multipliant par la quantité conjuguée,

$$0 < w_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 8n + 5} + 2n + 2} \leq \frac{1}{4n + 4} \rightarrow 0.$$

La rationalisation a donné un numérateur constant et un dénominateur qui tend vers $+\infty$. La borne obtenue permet alors d'appliquer les gendarmes.

Une somme : combien de termes ?

Pour $n \geq 1$, soit $T_n = \sum_{k=1}^n 1/(n^2 + k)$. Comme $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, l'inversion donne, pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

En additionnant les n inégalités,

$$\frac{1}{n+1} \leq T_n \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Les deux bornes extrêmes tendent vers 0 : $T_n \rightarrow 0$. Dire que chaque terme est au plus 1 aurait donné seulement $T_n \leq n$, sans répondre à la question.

Attention

L'inégalité triangulaire $|a+b| \leq |a|+|b|$ est toujours valide. Son utilité dépend du but. Avant de séparer une différence de termes proches, cherche une factorisation, un dénominateur commun ou une quantité conjuguée.

Dans la suite racine, la même identité faisait apparaître l'erreur $4 - u_n$ au rang suivant. Pour une différence de racines, essaie la quantité conjuguée avant de majorer séparément les deux termes.

Contrôler une différence avec la dérivée

Priorité CGL : Très rentable. **Origine habituelle :** Terminale spécialité : dérivation et variations.

Les variations comparent les valeurs d'une fonction. Une borne sur sa dérivée permet aussi de contrôler l'écart entre deux valeurs à partir de l'écart entre leurs arguments.

De deux bornes sur la dérivée à deux bornes sur la différence

Soient $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et $m, M \in \mathbb{R}$. Si $m \leq f'(t) \leq M$ pour tout $t \in]a, b[$, alors, pour $a \leq x \leq y \leq b$,

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x).$$

Pour le démontrer, pose $G(t) = f(t) - mt$ et $H(t) = Mt - f(t)$. Ces fonctions sont continues sur le segment et dérivables à l'intérieur. Leurs dérivées $f'(t) - m$ et $M - f'(t)$ sont positives ou nulles : G et H sont croissantes. Pour $x \leq y$, les comparaisons $G(x) \leq G(y)$ et $H(x) \leq H(y)$ donnent exactement les deux bornes. Si $x = y$, toutes les différences sont nulles.

Pourquoi ces fonctions ? Pour prouver $f(y) - f(x) \geq m(y - x)$, réécris la cible sous la forme $f(y) - my \geq f(x) - mx$. Tu reconnais une comparaison de valeurs de G : il suffit alors d'étudier son sens de variation.

Passer de la dérivée à une borne sur l'écart

Sous les mêmes hypothèses, supposons $|f'(t)| \leq K$ sur $]a, b[$, avec $K \geq 0$. Les bornes $-K \leq f' \leq K$ donnent, pour tous $x, y \in [a, b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Pour $x \leq y$, la différence est comprise entre $-K(y - x)$ et $K(y - x)$: sa valeur absolue est au plus $K(y - x)$. Pour $y < x$, échange les arguments. La borne sur la dérivée doit être valable sur tout l'intervalle qui les sépare.

Exemple · Pourquoi l'intervalle compte

Sur $[2, 5]$, $f(t) = 1/t$ vérifie $|f'(t)| = 1/t^2 \leq 1/4$. Ainsi

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{4}|x - y| \quad (x, y \in [2, 5]).$$

On retrouve aussi la borne par $|1/x - 1/y| = |x - y|/(xy)$ et $xy \geq 4$. Sur $]0, 5]$, aucune constante finie ne borne $|f'|$: on ne peut pas reprendre le même argument sans éloigner les arguments de 0.

Obtenir une borne dans chaque sens

Sur $[1, 2]$, la dérivée du logarithme est comprise entre $1/2$ et 1 . En ordonnant x, y , puis en utilisant sa croissance, on obtient

$$\frac{1}{2}|x - y| \leq |\ln x - \ln y| \leq |x - y| \quad (x, y \in [1, 2]).$$

Jusqu'où aller. Variations, signes et contrôle d'une différence sur un intervalle précis.

Pour t'entraîner. CGL 2023, exercice 2 et CGL 2026, exercice 1 : détermine ce qu'il faut encadrer avant de choisir une borne.

9 · Géométrie utile au CGL

Priorité CGL : Très rentable. **Origine habituelle :** lycée ; quelques compléments olympiques.

Un repère transforme des conditions géométriques en égalités. Choisis-le pour simplifier la figure : origine en un centre, axe le long d'une droite importante, unité égale à une longueur fixée. Tu peux aussi changer d'échelle ou déplacer la figure lorsque cela préserve les propriétés étudiées ; justifie alors cette transformation.

Produit scalaire dans un repère orthonormé

Pour $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$, $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$ et $\|u\|^2 = u \cdot u$. Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Pour deux vecteurs non nuls, $u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\theta$.

Pour un vecteur $v \neq 0$, la composante de u sur sa direction est λv avec $\lambda = (u \cdot v)/\|v\|^2$: l'égalité $(u - \lambda v) \cdot v = 0$ caractérise la projection orthogonale.

Droites et distances

Une droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, a pour vecteur normal (a, b) . La distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à cette droite vaut

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pour la retrouver, prends un point A de la droite et projette $\overline{AM}$ sur le vecteur normal unitaire $(a, b)/\sqrt{a^2 + b^2}$. Le numérateur apparaît puisque $ax_A + by_A + c = 0$.

Cercles et tangentes

Le cercle de centre $O(h, k)$ et rayon $r > 0$ a équation $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Au point T du cercle, sa tangente est la droite passant par T et perpendiculaire à OT .

Pour vérifier cette caractérisation, un autre point M de cette droite satisfait $OT \cdot TM = 0$, donc $OM^2 = OT^2 + TM^2 > r^2$. La droite ne rencontre le cercle qu'en T ; c'est la tangente.

Attention

Un dessin renseigne sur les objets à comparer, mais une apparence de perpendicularité, de tangence ou d'alignement doit être démontrée.

Courbes et géométrie analytique

Une corde de parabole

Sur la courbe $y = x^2 + 2x$, deux points d'abscisses distinctes a, b déterminent une droite de pente

$$\frac{b^2 + 2b - a^2 - 2a}{b - a} = a + b + 2.$$

En utilisant le point d'abscisse a , son équation devient $y = (a + b + 2)x - ab$. Pour $a = b$, la division précédente est interdite ; la dérivée fournit la tangente $y = (2a + 2)x - a^2$. Les deux formules coïncident formellement après substitution, mais leur justification diffère.

Traduire un alignement ou une perpendicularité

Pour $u = (s, t) \neq (0, 0)$ et $v = (p, q)$, les vecteurs sont colinéaires si et seulement si $sq - tp = 0$.
Ils sont orthogonaux si et seulement si $sp + tq = 0$.

Pour la colinéarité, si $v = \lambda u$, le déterminant est nul. Réciproquement, si $sq - tp = 0$ et $s \neq 0$, prends $\lambda = p/s$: l'égalité donne $q = \lambda t$. Si $s = 0$, alors $t \neq 0$ et $p = 0$; prends $\lambda = q/t$. Les deux cas donnent $v = \lambda u$.

Pour des points distincts A, B , applique ce critère à $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$ pour tester l'alignement. Pour tester la perpendicularité des droites AB et AC , il faut aussi $A \neq C$ afin que les deux droites soient définies.

Exemple · Construire un quart de tour avec des coordonnées

Le vecteur $R(s, t) = (-t, s)$ a la même norme que (s, t) et lui est orthogonal : $s(-t) + ts = 0$ et $(-t)^2 + s^2 = s^2 + t^2$. Dans un repère orthonormé orienté, c'est le quart de tour direct.

Pour $A \neq B$, définis C par $\overrightarrow{AC} = R(\overrightarrow{AB})$. Alors $AC = AB$ et les droites sont perpendiculaires. Tu peux ainsi fabriquer un triangle rectangle isocèle sans introduire un nouvel ensemble de nombres.

Choisir la traduction. Une corde appelle une équation de droite ; un alignement, une colinéarité ; une perpendicularité, un produit scalaire. Écris la condition demandée avant de calculer.

Pour t'entraîner. CGL 2025, exercice 1 pour les cordes et tangentes ; CGL 2023, exercice 3 pour des polygones sur une courbe.

Quelques compléments géométriques

Priorité CGL : Complément facultatif. **Origine habituelle :** géométrie de lycée approfondie ; préparation olympique.

Similitude et rapports

Deux triangles non dégénérés ayant deux angles respectivement égaux sont semblables. Leurs côtés correspondants sont proportionnels et leurs aires sont dans le carré du rapport de similitude. Avant d'écrire un rapport, identifie explicitement les sommets qui se correspondent.

Puissance d'un point : une preuve analytique

Pour un cercle de centre O et rayon $r > 0$, posons $\Pi(M) = OM^2 - r^2$. Si une droite passant par M coupe le cercle en A, B , alors le produit des distances *orientées* depuis M vers A et B vaut $\Pi(M)$.

Choisissons un vecteur unitaire v sur la droite et écrivons les points sous la forme $M + tv$. L'équation du cercle devient

$$t^2 + 2(\overrightarrow{OM} \cdot v)t + OM^2 - r^2 = 0.$$

Les paramètres t_A, t_B ont pour produit le terme constant $OM^2 - r^2$. La propriété suit des relations somme-produit pour un trinôme, y compris si les deux intersections coïncident en une tangence.

Si M est intérieur au cercle, t_A, t_B sont de signes opposés : en longueurs positives, $MA \times MB = r^2 - OM^2$. Si M est extérieur et qu'une tangente issue de M touche le cercle en T , $MT^2 = OM^2 - r^2$. Deux sécantes issues du même point fournissent donc une égalité de produits, avec les signes contrôlés.

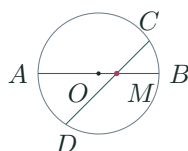
Essai guidé · Choisir une représentation

Deux cordes d'un cercle se croisent en un point intérieur M . Pourquoi a-t-on

$$MA \times MB = MC \times MD?$$

Retrouve la relation à partir de la propriété précédente, puis demande-toi si des triangles semblables auraient aussi permis une preuve.

Les deux produits positifs valent $r^2 - OM^2$. Cette preuve explique pourquoi la relation ne dépend pas de la direction de la corde.



Jusqu'où aller. Le socle est constitué des coordonnées, du produit scalaire et des intersections. Ces compléments donnent des relations supplémentaires lorsque la figure les suggère ; ils ne sont pas des prérequis pour commencer les annales récentes. La géométrie olympique spécialisée reste de faible priorité ici.

10 · Méthodes de recherche transversales

Chercher · Un problème fil rouge

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit $n+1$ entiers distincts dans $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Montrer que deux des entiers choisis sont tels que l'un divise l'autre.

Cherche d'abord pour $n = 2$, puis $n = 3$. Écris une tentative qui échoue et ce qu'elle t'apprend. La preuve est sur la page suivante.

Des essais informatifs

Pour $n = 2$, trois entiers parmi 1, 2, 3, 4 forcent soit la présence de 1, soit celle de 2 et 4. Mais cette liste de cas ne s'étend pas facilement. Elle montre qu'une divisibilité peut venir d'une multiplication par 2.

Classer les nombres en pairs et impairs force une répétition de parité, mais deux nombres impairs comme 3 et 5 ne se divisent pas. La répétition obtenue ne porte donc pas encore la bonne information. Cet échec suggère de chercher des catégories plus fines, liées à la multiplication par 2.

Reprendre avec une aide minimale

Cache le bas de la page avec une feuille, ou ne l'affiche pas encore à l'écran. Découvre seulement le premier indice. Dès qu'il te donne une piste, reprends la recherche ; ne découvre l'indice suivant qu'après un nouvel essai écrit.

Indice 1

Dans les petits cas, regarde les nombres 1, 2, 4, 8, puis 3, 6, 12. Quelle relation de divisibilité est automatique à l'intérieur de chacune de ces listes ? Essaie de former des catégories avec cette propriété.

Indice 2

Divise chaque entier choisi par 2 tant qu'il est pair. Regroupe les entiers qui donnent le même entier impair. Montre que deux entiers d'un même groupe sont comparables pour la divisibilité.

Indice 3

Tout entier positif s'écrit $2^r d$, avec d impair. Pour un entier au plus $2n$, quelles valeurs de d sont possibles ? Compte les groupes, puis utilise les $n+1$ entiers choisis.

Rédiger la preuve et traiter une variante

Preuve du problème fil rouge

Tout entier $a \geq 1$ admet une écriture unique $a = 2^r d$, où $r \in \mathbb{N}$ et d est impair positif : divise par 2 tant que le résultat est pair. Le processus termine puisqu'il fait décroître un entier positif. Pour l'unicité, si $2^r d = 2^s e$ avec $r < s$, alors $d = 2^{s-r} e$ serait pair, contrairement à l'hypothèse. Le cas $s < r$ s'exclut de même ; il reste $r = s$, puis $d = e$.

Pour $a \leq 2n$, sa partie impaire d appartient aux n valeurs $1, 3, \dots, 2n-1$. Les $n+1$ entiers choisis donnent donc deux nombres de même partie impaire, par les tiroirs. Ils sont distincts, donc leurs exposants r, s diffèrent ; en supposant $r < s$, $2^r d \mid 2^s d$. La conclusion est démontrée.

Réutiliser le principe des tiroirs

On a classé les nombres selon leur partie impaire pour que deux nombres dans une même classe aient une relation de divisibilité. Pour réemployer les tiroirs dans un autre problème, cherche des catégories dont la répétition donne la relation demandée.

Chercher · Une variante à chercher

Quel est le maximum d'entiers de $\{1, \dots, 2n\}$ que tu peux choisir sans divisibilité entre deux distincts ? Prouve une borne, puis trouve un ensemble qui l'atteigne. La réponse est à la page suivante.

Quand tu ne parviens plus à avancer

Retour aux définitions : remplace « premier entre eux », « indépendant » ou « convexe » par sa condition précise.

Hypothèse inutilisée : écris ce qu'elle impose, puis cherche où cette condition peut servir.

Questions précédentes : fais l'inventaire des bornes et identités disponibles.

Objet auxiliaire : différence, quotient, énergie, graphe, événement complémentaire.

Cas extrême : teste zéro, une égalité, un minimum ou une frontière de domaine.

Changer de question : note le dernier résultat valide et la difficulté exacte avant de changer de question.

Après une solution, demande-toi quel élément de l'énoncé pouvait suggérer le choix effectué : une moyenne pour les carrés, des choix répétés pour les tiroirs, une différence de termes proches pour une rationalisation.

Pour aller plus loin avec cette méthode

Tu viens de chercher, de reprendre avec un indice, puis de rédiger et d'expliquer l'idée. La [préparation complète AlgèBrille](#) organise et répète cette démarche sur une progression de problèmes : difficulté calibrée, indices gradués, corrections qui expliquent l'origine des idées, reprises sans aide et simulations. C'est la suite recommandée pour travailler cette démarche régulièrement dans un parcours organisé.

Vérifier tes tests de transfert

Compare ces réponses à tes essais. Repère le passage qui te manquait, puis reprends-le sans support. Pour la question entière, ne te contente pas d'avoir reconnu l'outil : vérifie aussi les domaines et la conclusion demandée.

1. Un rang valable pour tous les termes initiaux

La suite est bien définie, puisque la récurrence affine est définie pour tout réel. Posons $e_n = 1 - u_n$. Alors $e_0 \in [0, 1]$ et

$$e_{n+1} = 1 - \frac{u_n + 2}{3} = \frac{1 - u_n}{3} = \frac{e_n}{3}.$$

Une récurrence donne $e_n = (1 - u_0)3^{-n}$. Ainsi $|u_n - 1| \leq 3^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $3^9 = 19683 > 10000$, le rang $N = 9$ convient : pour $n \geq 9$, $3^{-n} \leq 3^{-9} < 10^{-4}$, indépendamment de u_0 . Le rang 8 ne donnerait pas cette garantie, car $u_0 = 0$ donne $|u_8 - 1| = 1/6561 > 10^{-4}$.

2. Une somme rationnelle ne suffit pas

Prends $t = 8 + 3\sqrt{7}$. Il est strictement positif et irrationnel : s'il était rationnel, $(t - 8)/3 = \sqrt{7}$ le serait aussi, ce qui contredit la preuve du chapitre 4. Or

$$(8 + 3\sqrt{7})(8 - 3\sqrt{7}) = 64 - 63 = 1.$$

On a donc $1/t = 8 - 3\sqrt{7}$ et $t + 1/t = 16$. Ce contre-exemple vérifie l'hypothèse et réfute la conclusion proposée.

3. Un écart entre deux racines

Pour $x, y \in [1, 4]$, le dénominateur $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ vaut au moins 2, donc il est non nul. La différence de carrés donne

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

Si $x = y$, les deux membres sont nuls. Si $x \neq y$, au moins l'un des nombres est strictement supérieur à 1 ; le dénominateur est alors strictement supérieur à 2 et le numérateur strictement positif. L'inégalité est stricte. L'égalité a donc lieu si et seulement si $x = y$.

4. Une information change les paires possibles

Notons B l'événement « somme impaire » et A « les deux entiers sont au plus 3 ». Une somme est impaire exactement lorsqu'un entier est pair et l'autre impair. Parmi les $\binom{6}{2} = 15$ paires équiprobables, $3 \times 3 = 9$ sont dans B : $P(B) = 9/15 > 0$. Seules $\{1, 2\}$ et $\{2, 3\}$ appartiennent à $A \cap B$, donc $P(A \cap B) = 2/15$. Ainsi $P(A | B) = (2/15)/(9/15) = 2/9$. Compter toutes les paires au dénominateur ignorerait l'information reçue.

La variante du problème fil rouge

Le problème démontré impose au plus n entiers sans divisibilité entre deux distincts. L'ensemble $\{n + 1, \dots, 2n\}$ atteint cette borne : si $a < b$ lui appartiennent et $a \mid b$, alors $b \geq 2a > 2n$, contradiction. Le maximum est donc n .

11 · Comment travailler une annale

Choisis d'abord un problème ou une partie de sujet. Garde la correction fermée pendant la recherche, puis utilise-la pour reprendre une difficulté précise. Les durées proposées ci-dessous sont des repères que tu peux adapter à ton niveau et à la question.

Une séance sur un problème

1. Lire le problème, environ 10 minutes. Repère les définitions, paramètres, domaines et parties. Signale les résultats qu'une question demande de démontrer : ils serviront peut-être ensuite. Ne cherche pas encore toutes les preuves.

2. Chercher, 45 à 90 minutes. Écris les petits cas et les transformations essayées. Consacre une partie de la séance à une question dont tu comprends l'énoncé, puis change de question si tes essais ne donnent plus de résultat nouveau. Les sujets 2024, 2025 et 2026 autorisent explicitement l'emploi d'un résultat antérieur non démontré en le signalant. Lis toujours les consignes du sujet travaillé avant d'utiliser cette possibilité.

3. Choisir une aide minimale. Commence par identifier ce qui te manque : une comparaison, une borne, un dénombrement ? Si un indice est disponible, essaie de poursuivre avec lui. Sinon, lis le début de la solution et arrête-toi dès qu'une étape te donne une piste à chercher toi-même.

4. Rédiger. Reprends une solution obtenue, même partielle. Sépare le brouillon de la preuve finale. Fais apparaître les hypothèses aux passages sensibles : division, continuité, indépendance, récurrence.

Quand ouvrir la correction ?

Si tu ne comprends pas l'énoncé, clarifie les définitions avant de chercher. Si tu manques d'idée, écris quelques essais et ce qu'ils donnent avant d'ouvrir le corrigé. Si tu as une piste mais ne peux pas justifier une étape, regarde d'abord si le cours fournit le résultat nécessaire. Quand tu demandes de l'aide, montre ce passage précis.

Lire la correction par étapes

Avant chaque passage, demande : « Que ferait-on maintenant ? » Après un objet auxiliaire, explique pourquoi il a été choisi. Après une inégalité, repère les signes nécessaires et le cas d'égalité. Après la conclusion, cherche où chacune des hypothèses est intervenue.

Attention

Après avoir lu la correction, ferme-la et reprends la question. Si tu ne retrouves pas une étape, note laquelle et reprends-la séparément. Tu pourras ainsi vérifier ce que la lecture t'a appris.

Reprendre une annale et préparer une simulation

Refaire la question quelques jours plus tard

Le lendemain ou quelques jours plus tard, refais les questions clés sans correction. Une semaine après, reprends une question voisine ou modifie un paramètre. Si tu ne retrouves pas l'objet auxiliaire, reviens à la question : quels mots, quelles valeurs ou quelles égalités pouvaient suggérer son choix ?

Carnet d'erreurs	Ce qu'il faut écrire
Obstacle	La première étape qui n'a pas pu être justifiée.
Cause	Connaissance manquante, idée absente, calcul faux, hypothèse oubliée ou temps mal réparti.
Correction	Une phrase ou un calcul qui répare précisément l'obstacle.
Indice dans l'énoncé	La donnée ou la relation qui pouvait suggérer la méthode.
Test	Une question à refaire sans aide, avec une date de retour.

Exemple · Une erreur sur la convergence

Tu as trouvé un point fixe et conclu que la suite converge vers lui. La preuve est incomplète : l'équation donne seulement une limite possible. Reprends un exemple où la suite ne converge pas vers son point fixe, puis démontre la convergence de la suite étudiée : vérifie les hypothèses du théorème choisi ou établis un encadrement qui la prouve.

Faire relire une preuve ciblée

Après une recherche individuelle, montre une courte preuve à ton professeur ou à un camarade. Demande quel passage il ne peut pas vérifier à partir de ce que tu as écrit. Répare ce passage, puis explique oralement pourquoi il est valide. Le communiqué du jury de 2017 conseille le travail suivi avec un professeur et en groupe.

Passer progressivement à cinq heures

Commence par des séances sur une partie, puis sur un problème entier. Effectue ensuite une ou deux simulations complètes dans les conditions matérielles de l'épreuve : cinq heures, sans correction, avec une copie rédigée. Garde du temps à la fin pour relire les preuves obtenues.

Lors d'une simulation, lis l'ensemble au début, choisis une entrée, puis surveille les périodes sans progrès. Avant de changer de question, note le dernier résultat établi pour pouvoir reprendre ta piste. Note les résultats admis et indique exactement les questions traitées.

Le kit de préparation du jury de 2017 recommande une préparation suivie et une ou deux mises en situation de cinq heures. Ses indications méthodologiques restent utiles ; ses références au programme de la série S sont historiques.

12 · Carte de préparation

Commence par le socle ci-dessous, puis choisis les outils de la page suivante en fonction des questions travaillées. Une référence indique une occasion de mobiliser une méthode ; elle ne signifie pas qu'un théorème supplémentaire est exigé ni que le problème entier est accessible immédiatement.

Le socle à mobiliser

Notion	Origine habituelle	Une entrée pour chercher
Logique, preuve	Lycée	CGL 2022, ex. 1 ; CGL 2026, ex. 3, ordre des choix
Suites, bornes, convergence	Terminale spécialité	CGL 2021, ex. 1 ; CGL 2024, ex. 1
Calcul, sommes et produits	Lycée, puis problèmes	CGL 2026, ex. 1 et 2 : partir des définitions données
Polynômes, racines	Lycée approfondi	CGL 2023, ex. 2, questions 1 à 4
Dénombrement, conditionnement	Première / Terminale	CGL 2021, ex. 2 ; CGL 2024, ex. 2
Variations, continuité, TVI	Terminale spécialité	CGL 2023, ex. 2, questions 1 à 4
Convexité, tangentes, inégalités	Terminale spécialité	Exemples du chapitre 8 ; POFM junior 2, p. 68
Coordonnées, produit scalaire	Lycée	CGL 2025, ex. 1, I ; CGL 2023, ex. 3

Pour commencer. Choisis une seule entrée. Cherche une question pendant trente minutes, puis relie le premier obstacle à une page du cours. Une notion de Terminale non encore étudiée en Première ne permet pas de juger ton niveau de raisonnement.

Carte : outils très rentables et compléments

Des outils de transfert à mobiliser après le socle

Outil très rentable	Origine habituelle	Une entrée pour chercher
Suite auxiliaire, paramètre	Lycée approfondi / MPSI	CGL 2025, ex. 2, question 2c : auxiliaire construit par le sujet
PGCD, Bézout, Gauss	Maths expertes	CGL 2025, ex. 1, question 6 ; CGL 2024, ex. 3, question 18 : autre voie par la question 15
Congruences élémentaires	Maths expertes	CGL 2026, ex. 2, questions 12 à 15 : propriétés construites par le sujet
Partie entière, intervalles	Définition élémentaire / problèmes	CGL 2022, ex. 1 ; CGL 2024, ex. 3 : définitions fournies, à exploiter
Différences finies	Problèmes / MPSI	CGL 2026, ex. 2, questions 7 et 8 : outil défini dans le sujet
Tiroirs, double comptage	Préparation olympique	CGL 2022, ex. 2, question 6 ; TD p. 68
Invariants, minimum ou maximum	Préparation olympique	CGL 2022, ex. 2, fractions ; CGL 2024, ex. 3, minimum positif
Substitutions dans une équation fonctionnelle	Lycée approfondi / olympique	CGL 2025, ex. 3 : examiner domaine et valeurs autorisées
Récurrence probabiliste	Lycée / problèmes	CGL 2022, ex. 3

Des compléments à choisir, sans tout apprendre

Le quotient auxiliaire d'une récurrence homographique, les états finis, les inverses modulaires, les équations diophantiennes, les racines rationnelles, les petits graphes et les relations de cercle sont facultatifs. Reprends-les lorsqu'un problème les suggère ; ne retarde pas les annales pour terminer cette liste.

La moyenne arithmético-géométrique de deux nombres et le regroupement de moyennes sont des approfondissements utiles après le socle. Apprends à retrouver les carrés positifs, les regroupements et les cas d'égalité plutôt qu'à accumuler des noms de théorèmes.

Choisir un parcours réaliste

Avant de choisir un parcours, utilise la checklist de la page suivante. Repère les résultats que tu ne sais pas énoncer et les preuves que tu ne peux pas refaire. Adapte les propositions ci-dessous à ces difficultés et au temps qui te reste.

Il reste deux semaines

Reprends raisonnement et suites en priorité. Répare les lacunes de calcul, de congruences et de conditionnement qui apparaissent dans tes annales. Cherche des premières parties de sujets récents ; refais leurs étapes clés. Effectue une simulation complète assez tôt pour pouvoir analyser ta copie. Évite d'ajouter un grand chapitre inconnu dans les derniers jours.

Il reste six semaines

Consacre le début au socle : preuves, suites, algèbre et probabilités. Ajoute ensuite arithmétique, comptages et analyse sélective, tout en cherchant chaque semaine une partie d'annale. Reviens sur les suites avec paramètres et les objets auxiliaires. Réserve les dernières semaines aux problèmes entiers, à deux simulations espacées et aux réparations identifiées dans le carnet d'erreurs.

Tu disposes d'un trimestre ou davantage

Chaque semaine, reprends un outil de cours, cherche un problème qui l'emploie et refais une question d'une séance précédente sans aide. Change régulièrement de domaine. Une fois le socle solide, choisis des exercices olympiques ciblés en algèbre, arithmétique ou combinatoire ; ne prends pas leur programme entier comme objectif. Garde une annale récente pour une simulation que tu n'auras pas déjà lue. Prévois aussi un créneau de rattrapage : un planning sans marge se désorganise au premier imprévu. Au début d'une séance, reprends brièvement un outil des jours précédents avant le thème du jour.

Vérifier qu'un outil est appris

Énoncer : donner le résultat avec son domaine et ses hypothèses.

Mobiliser : reconnaître une situation où il s'applique et justifier l'application.

Adapter : traiter une variante où les données, le paramètre ou la conclusion changent.

Si tu es en Première

Tu peux déjà travailler les preuves, le calcul, les dénombrements élémentaires et les petits problèmes d'arithmétique. Pour les suites et l'analyse, commence par les notions abordées en classe et demande à ton professeur comment étudier les résultats encore nouveaux. Reprends les exemples jusqu'à pouvoir les justifier avant d'ajouter un autre chapitre.

À différer. Théorie avancée des nombres, géométrie olympique spécialisée, topologie, espaces vectoriels abstraits, séries et développements limités. Commence par les outils qui te manquent dans les annales travaillées.

13 · Checklist finale

Coche un point seulement après l'avoir vérifié par un énoncé précis, une courte preuve ou une résolution sans aide. Une case vide sert à choisir ton prochain travail.

Connaissances

- ☐ Je distingue implication, équivalence et réciproque ; je nie un énoncé quantifié.
- ☐ Je rédige une récurrence, y compris quand deux initialisations sont nécessaires.
- ☐ Je justifie qu'une suite est bien définie et je démontre les hypothèses du théorème de convergence utilisé.
- ☐ Je sais construire une suite auxiliaire et contrôler ses dénominateurs.
- ☐ Pour les enrichissements travaillés, je sais utiliser PGCD, Bézout, Gauss et une congruence sans simplification illégitime.
- ☐ Je manipule sommes, produits, parties entières et racines de polynômes.
- ☐ Je justifie un comptage, un conditionnement et une hypothèse d'indépendance.
- ☐ Je sais employer variations, TVI, convexité et coordonnées pour un but précis.

Recherche et rédaction

- ☐ Mes petits cas produisent une observation écrite ou une conjecture précise.
- ☐ Je relis les questions précédentes et repère les hypothèses encore inutilisées.
- ☐ Je sais ce qu'une piste qui échoue m'apprend et quand la laisser provisoirement.
- ☐ J'annonce les résultats admis ; je distingue intuition et preuve.
- ☐ Je vérifie les cas d'égalité et les solutions obtenues après des implications.
- ☐ Je peux refaire une solution plusieurs jours après sa lecture.

Conditions d'épreuve

- ☐ J'ai effectué au moins une simulation complète de cinq heures.
- ☐ J'ai analysé ma copie et réparé deux ou trois obstacles précis.
- ☐ Je garde du temps pour les questions accessibles et la relecture.
- ☐ Je connais les consignes matérielles de ma convocation et prépare mon matériel.

Dans les derniers jours, refais des preuves courtes et reprends les erreurs que tu peux encore corriger. Garde un rythme de sommeil régulier. Le jour de l'épreuve, rédige précisément ce que tu as démontré, même si tu n'as pas terminé la question.

14 · Ressources pour t'entraîner

Choisis une ressource en fonction de la méthode que tu veux entraîner. Les indications ci-dessous te proposent des exercices à chercher après le chapitre correspondant.

Chercher des sujets et lire les rapports

Éduscol : sujets et rapports du Concours général. [Ouvrir les archives officielles](#). Choisis d'abord un sujet récent dans la carte de préparation. Garde son rapport pour après la recherche : il te permettra de comparer les difficultés signalées par le jury aux passages de ta copie.

Travailler une méthode sur de nouveaux problèmes

Les feuilles suivantes sont proposées par la **POFM, une action d'Animath**. Les numéros indiqués te donnent un point de départ ; les problèmes plus avancés peuvent attendre.

Inégalités : envoi 2 d'algèbre, session de 2024 à 2025. [Énoncés et corrigé commenté](#). Commence par les exercices juniors 1 et 2, après les inégalités. Le commentaire du 1 aide à contrôler les deux sens du cas d'égalité. Pour le 2, cherche une preuve par concavité ou tangente : le corrigé utilise Cauchy–Schwarz, qui n'est pas un prérequis de ce guide. Lis-le après avoir écrit ta tentative.

PGCD et nombres premiers : feuille du groupe A, janvier 2026. [Ouvrir la feuille](#). Après Bézout et Gauss, cherche les exercices 4 à 6 de l'« Introduction », puis les exercices 1 et 2 du « Plat ». Ils font travailler la divisibilité, la coprimauté et le choix d'un argument de congruence. La feuille contient des énoncés sans corrigé.

Double comptage : TD d'Antoine Derimay. [Ouvrir le TD](#). Cherche d'abord les exercices 2 et 6, puis le 8. Tu devras définir l'ensemble à compter et choisir deux façons de le décrire, au-delà de l'identité démontrée dans ce cours. Le TD ne contient pas de corrigé.

Invariants : TD Junior A, 2023. [Ouvrir le TD](#). Essaie les exercices 1 à 3, puis le 7. Tu y travailleras des questions d'impossibilité et le choix d'une quantité conservée. La feuille contient des énoncés sans corrigé. Pour ces TD, fais relire une preuve si tu ne peux pas vérifier seul une étape.

Continuer la préparation

Tu disposes de résultats avec leurs hypothèses, de preuves à refaire et d'une carte pour choisir des questions d'annales. Tu peux revenir à une définition, tester une idée et contrôler ce qui permet de conclure. La checklist t'aide à repérer ce que tu sais mobiliser et ce qui demande encore du travail.

Ta prochaine séance

Choisis une entrée de la carte reliée au chapitre que tu viens de travailler. Garde la correction fermée pendant trente minutes. Écris tes essais, puis rédige les résultats obtenus. Si tu bloques, note le dernier résultat démontré et ce qui te manque pour poursuivre.

Répare cette difficulté avec le cours ou une aide limitée. Quelques jours plus tard, reprends la question sans support. Compare les deux tentatives : as-tu retrouvé la méthode ? Peux-tu justifier le passage qui te manquait ?

Organiser la suite de ton entraînement

Retrouver une preuve connue ne garantit pas que tu reconnaîtras son idée dans un autre énoncé. Pour apprendre à choisir les outils, tu dois chercher des problèmes nouveaux et reprendre ceux qui ont résisté. Il faut aussi choisir leur difficulté, doser l'aide, prévoir les reprises et comprendre les causes de tes erreurs. Une simulation complète vérifie ensuite tes décisions et ta rédaction pendant cinq heures.

La préparation complète AlgèBrille est la suite recommandée pour organiser cette progression. Les problèmes te font réutiliser les outils dans des situations variées ; les indices gradués relancent la recherche sans livrer toute la solution. Les corrections détaillent les preuves et les éléments qui pouvaient suggérer l'idée. Les reprises, le diagnostic et les simulations servent à vérifier ce que tu retrouves ensuite seul et à choisir le travail suivant.

Poursuivre avec un parcours structuré

Pour prolonger ce travail avec la préparation complète AlgèBrille, retrouve la suite du parcours sur la page Concours général :

algebrille.fr/concours-general-maths



ALGÈBRILLE

